



Centro Educacional MADAN Prova de Bolsão - ITA

Instruções para a realização da Prova de Bolsão da Turma ITA do Centro Educacional MADAN.

1. Esta prova de admissão tem duração total de 2h.
2. É permitido o uso **apenas** de lápis (ou lapiseira), caneta e borracha. **É proibido qualquer outro material escolar.**
3. A Prova de Bolsão é composta por **30 questões de múltipla escolha** (numeradas de 01 a 30), sendo todas de **Matemática**.
4. Verifique se este caderno de questões está completo.
5. Cada questão admite **uma única** resposta.
6. Antes do final da prova, você receberá uma folha de gabarito para a transcrição das respostas. Usando **caneta azul ou preta**, assinale a opção correspondente à resposta de cada uma das questões de múltipla escolha. **Não esqueça de colocar seu nome, e-mail e telefone na folha de gabarito.**
7. Cuidado para não errar no preenchimento da folha de gabarito. Se isso ocorrer, avise o fiscal, que lhe fornecerá uma folha extra, com o cabeçalho devidamente preenchido.
8. **Não haverá tempo suplementar para o preenchimento da folha de gabarito.**
9. A **não devolução** da folha de gabarito e do caderno de questões implicará na **desclassificação do candidato**.
10. **Os alunos não estão autorizados a levar o caderno de questões.**
11. **Aguarde o aviso para iniciar a prova. Ao terminá-la, avise o fiscal e aguarde-o no seu lugar.**
12. Até o dia 30/11/2022, o gabarito desta prova será disponibilizado no site do MADAN (www.madan.com.br).
13. Até o dia 30/11/2022, será disponibilizada, no site do MADAN (www.madan.com.br), a classificação com os respectivos percentuais de desconto.

Questão 1

Se a, b e d são comprimentos de um lado, a menor diagonal e da segunda maior diagonal, respectivamente, de um eneágono regular, então:

- a) $d = a + b$
- b) $d^2 = a^2 + b^2$
- c) $d^2 = a^2 + ab + b^2$
- d) $b = \frac{a+d}{2}$
- e) $b^2 = ad$

Questão 2

Se a_1, a_2, a_3, \dots é uma sequência de números positivos tais que $a_{n+2} = a_n \cdot a_{n+1}$ para todo inteiro positivo n , então a sequência (a_n) é uma progressão geométrica

- a) Para todos os valores positivos a_1 e a_2
- b) Se, e somente se, $a_1 = a_2$
- c) Se, e somente se, $a_1 = 1$
- d) Se, e somente se, $a_2 = 1$
- e) Se, e somente se, $a_1 = a_2 = 1$

Questão 3

Qual o produto de todos os inteiros positivos ímpares menores que 10000?

- a) $\frac{10000!}{(5000!)^2}$
- b) $\frac{10000!}{2^{5000}}$
- c) $\frac{9999!}{2^{5000}}$
- d) $\frac{10000!}{2^{5000} \cdot 5000!}$
- e) $\frac{5000!}{2^{5000}}$

Questão 4

Quatro inteiros positivos a, b, c e d tem o produto igual a $8!$ e satisfazem

$$\begin{aligned} ab + a + b &= 524 \\ bc + b + c &= 146 \\ cd + c + d &= 104 \end{aligned}$$

Qual o valor de $a - d$?

- a) 4
- b) 6
- c) 8
- d) 10
- e) 12

Questão 5

Dois números inteiros positivos m e n , com $m > n$ que podem ser expressados na forma abaixo

$$a_0 + 7a_1 + 49a_2 + 343a_3$$

Onde a_i é um elemento do conjunto $A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ para $i = 0,1,2,3$ e $a_3 \neq 0$. Encontre o número de valores diferentes de m tais que $m + n = 2010$.

- a) 1005
- b) 1029
- c) 668
- d) 662
- e) 343

Questão 6

Em uma família, o número de irmãs de cada filha é igual à metade do número de irmãos. Cada filho tem o mesmo número de irmãos e irmãs. O número total de filhos e filhas é:

- a) 4
- b) 5
- c) 7
- d) 10
- e) 15

Questão 7

Qual o valor de $\sqrt[13]{21982145917308330487013369}$?

- a) 87
- b) 89
- c) 91
- d) 93
- e) 95

Questão 8

Sejam a, b e c números reais tais que $\frac{ab}{a+b} = \frac{1}{3}$, $\frac{bc}{b+c} = \frac{1}{4}$ e $\frac{ac}{a+c} = \frac{1}{5}$. Encontre o valor de $\frac{24abc}{ab+bc+ca}$.

- a) 4
- b) 3
- c) 2
- d) 1
- e) 0

Questão 9

Sejam x e y números reais satisfazendo a desigualdade $5x^2 + y^2 - 4xy + 24 \leq 10x - 1$. Qual o valor de $x^2 + y^2$?

- a) 5
- b) 25
- c) 125
- d) 625
- e) 3125

Questão 10

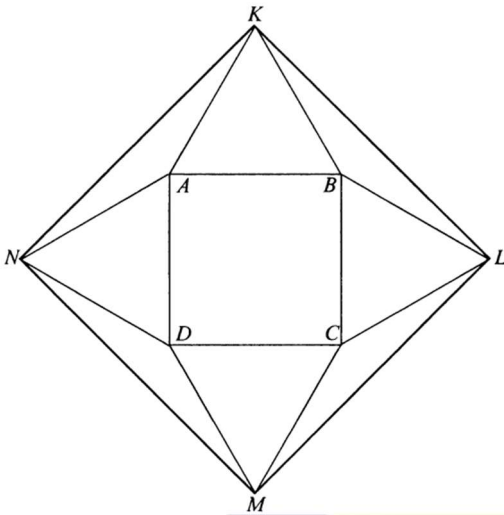
Quantas triplas ordenadas (x, y, z) de inteiros satisfazem a inequação

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 < xy + 3y + 2z:$$

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 5
- e) 8

Questão 11

Os pontos K, L, M e N pertencem ao plano do quadrado $ABCD$, tal que AKB, BLC, CMD e DNA são triângulos equiláteros. A área de $ABCD$ é 16. Qual é a área de $KLMN$?



- a) 32
- b) $16 + 16\sqrt{3}$
- c) 48
- d) $32 + 16\sqrt{3}$
- e) 64

Questão 12

Qual o valor de:

$$\frac{\underbrace{222 \dots 222}_{n \text{ 2's}} + \underbrace{(333 \dots 333)^2}_{n \text{ 3's}}}{n}$$

- a) $3 \times \frac{\underbrace{222 \dots 222}_{n \text{ 2's}}}{n} - 1$
- b) $4 \times \frac{\underbrace{333 \dots 333}_{n \text{ 3's}}}{n} - 1$
- c) $\frac{\underbrace{(111 \dots 111)^2}_{n \text{ 1's}}}{n}$
- d) $\frac{\underbrace{111 \dots 111}_{n+1 \text{ 1's}}}{n}$
- e) $\frac{\underbrace{111 \dots 111}_{2n \text{ 1's}}}{2n}$

Questão 13

Considerando que exista a operação \otimes entre pares ordenados que satisfaçam as seguintes propriedades:

$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Calcule o valor de $\underbrace{(1,1) \otimes (1,1) \otimes \dots \otimes (1,1)}_{20 \text{ pares ordenados}}$

- a) (0,20)
- b) (512,0)
- c) (0,1024)
- d) (0, -512)
- e) (-1024,0)

Questão 14

Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 1$, calcule o valor de $\frac{(5x+3)^2}{x^{10}}$:

- a) 0
- b) 1
- c) -1
- d) 2
- e) -2

Questão 15

Um atleta iniciou seu treinamento visando as competições de fim de ano. Seu treinamento consiste em cinco tipos diferentes de treinos: treino T_1 , treino T_2 , treino T_3 , treino T_4 e treino T_5 . A sequência de dos treinamentos deve seguir esta ordem:

Dia	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º	13º
Treino	T_1	R	R	T_2	R	R	T_3	R	T_4	R	R	T_5	R

A letra R significa repouso. Após completar a sequência de treinamentos, o atleta começa novamente a sequência a partir do treino T_1 e segue a ordem descrita. Após 22 semanas completas de treinamento, se dará o início das competições. A sequência de treinamentos que o atleta realizará na 22ª semana de treinos é:

- a) $T_3RT_4RRT_5R$
- b) $T_2RRT_3RT_4R$
- c) $RT_4RRT_5RT_1$
- d) RRT_3RT_4RR
- e) $RT_5RT_1RRT_2$

Questão 16

Uma sequência de quatro termos é obtida adicionando cada termo de um progressão aritmética de inteiros positivos ao termo correspondente de uma progressão geométrica de inteiros positivos. Os três primeiros

termos dessa sequência gerada são 57, 60 e 91. Qual é o quarto termo desta sequência?

- a) 190
- b) 194
- c) 198
- d) 202
- e) 206

Questão 17

Defina L_n como o mínimo múltiplo comum de todos os inteiros positivos de 1 a n , inclusive. Existe um único inteiro h tal que $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{17} = \frac{h}{L_{17}}$. Qual é o resto quando h é dividido por 17?

- a) 1
- b) 3
- c) 5
- d) 7
- e) 9

Questão 18

Defina a sequência recursivamente por $F_0 = 0, F_1 = 1$ e $F_n =$ o resto quando $F_{n-1} + F_{n-2}$ é dividido por 3, para todo $n \geq 2$. Esta sequência começa 0,1,1,2,0,2, Qual é o valor de

$$F_{2017} + F_{2018} + F_{2019} + F_{2020} + F_{2021} + F_{2022} + F_{2023} + F_{2024}$$

- a) 6
- b) 7
- c) 8
- d) 9
- e) 10

Questão 19

No triângulo ΔABC , $AB = 6, AC = 8, BC = 10$, e D é o ponto médio de BC . Qual é a soma dos raios dos círculos inscritos nos triângulos ΔADB e ΔADC :

- a) $\sqrt{5}$
- b) $\frac{11}{4}$
- c) $2\sqrt{2}$
- d) $\frac{17}{6}$
- e) 3

Questão 20

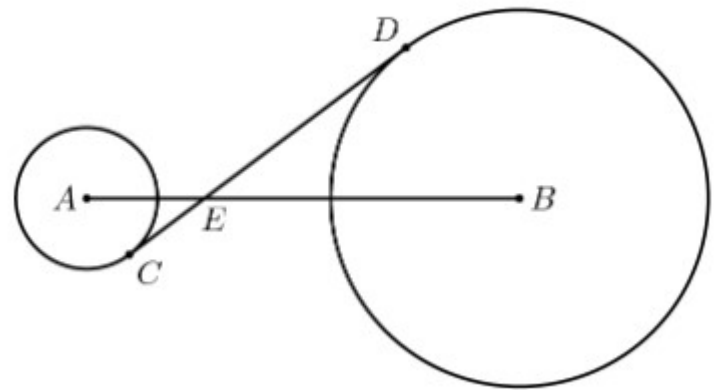
Seja $N = 123456789101112 \dots 4344$ um número de 79 dígitos obtido quando escrevemos os números de 1 a 44 em ordem crescente, um após o outro. Qual é o resto de N na divisão por 45?

- a) 1

- b) 4
- c) 9
- d) 18
- e) 44

Questão 21

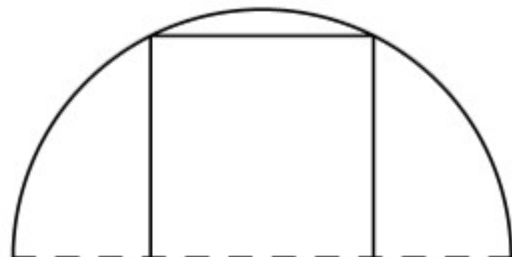
Círculos com centros em A e B tem raios 3 e 8, respectivamente. Uma tangente interna comum intersecta os círculos em C e D , respectivamente. Retas AB e CD se intersectam em E , e $AE = 5$. Qual é o valor de CD ?



- a) 13
- b) $\frac{44}{3}$
- c) $\sqrt{221}$
- d) $\sqrt{255}$
- e) $\frac{55}{3}$

Questão 22

Um quadrado de área 40 é inscrito em um semicírculo como mostrado na figura abaixo. Qual a área do semicírculo?



- a) 20π
- b) 25π
- c) 30π
- d) 40π
- e) 50π

Questão 23

Qual dos seguintes números é um quadrado perfeito?

- a) $98!.99!$
- b) $98!.100!$
- c) $99!.100!$
- d) $99!.101!$
- e) $100!.101!$

Questão 24

Na sequência 2001,2002,2003, ..., cada termo depois do terceiro é obtido subtraindo o termo anterior da soma dos dois termos que precedem esse anterior. Por exemplo, o quarto termo é:

$$2001 + 2002 - 2003 = 2000$$

Qual é o 2004º termo dessa sequência?

- a) -2004
- b) -2
- c) 0
- d) 4003
- e) 6007

Questão 25

Sejam x, y números inteiros tais que:

$$x^3 + y^3 + (x + y)^3 + 30xy = 2000$$

Então $x + y$ vale:

- a) 2
- b) 4
- c) 6
- d) 8
- e) 10

Questão 26

Quantos números inteiros entre 1 e 2005 são múltiplos de 3 ou 4 e não são de 12?

- a) 501
- b) 668
- c) 835
- d) 1002
- e) 1169

Questão 27

Quantos pares de soluções inteiras positivas (x, y) existem para a equação $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{7}$:

- a) 1
- b) 3
- c) 6
- d) 9
- e) 10

Questão 28

No fim de 1994, Neto tinha a metade da idade de sua avó. A soma dos anos de nascimento dos dois é 3844. Quantos anos Neto completa em 2006?

- a) 55
- b) 56
- c) 60
- d) 62
- e) 108

Questão 29

Sejam x e y números racionais. Sabendo que $\frac{x-5\sqrt{2006}}{4-y\sqrt{2006}}$ também é um número racional, quanto vale o produto xy ?

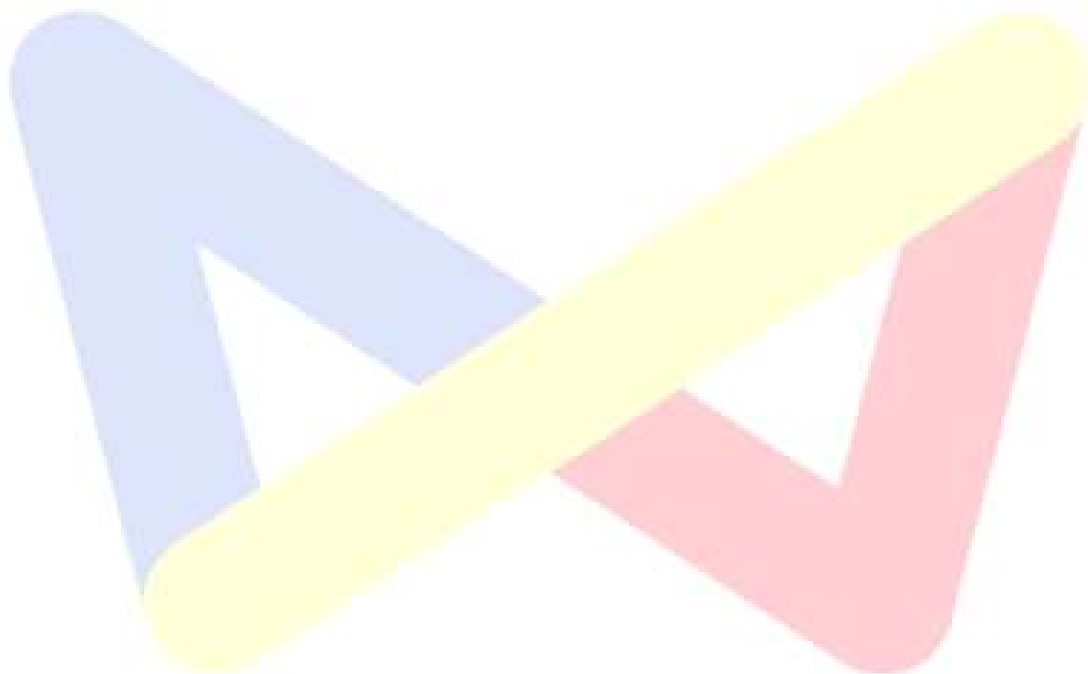
- a) 20
- b) Pode ser igual a 20, mas também pode assumir outros valores
- c) 1
- d) 6
- e) Não se pode determinar

Questão 30

O professor Daniel aplicou uma prova para seus cinco alunos e, após corrigi-las, digitou as notas em uma planilha eletrônica que calcula automaticamente a média das notas à medida que elas são digitadas. Daniel notou que após digitar cada nota a média calculada pela planilha era um número inteiro. Se as notas dos cinco estudantes são, em ordem crescente, 71,76,80,82 e 91. Qual foi a última nota que Daniel digitou?

- a) 71
- b) 76
- c) 80
- d) 82
- e) 91

RASCUNHO



Gabarito Bolsão 2023

Turma ITA



1	C	11	D	21	B
2	E	12	E	22	E
3	D	13	E	23	C
4	D	14	B	24	C
5	D	15	D	25	E
6	C	16	E	26	D
7	B	17	C	27	B
8	A	18	D	28	C
9	C	19	D	29	A
10	A	20	C	30	C