Centro Educacional MADAN
Prova de Admissão

Instruções para a realização da Prova de Admissão da Turma ITA 2021 do Centro Educacional MADAN.

1. Esta prova de admissão tem duração total de 2 horas.

2. É permitido o uso **apenas** de lápis (ou lapiseira), caneta e borracha. **É proibido qualquer outro material escolar.**

3. A Prova de Admissão é composta por **40 questões de múltipla escolha** (numeradas de 01 a 40), sendo todas de **Matemática**.

4. Verifique se este caderno de questões está completo.

5. Cada questão admite **uma única** resposta.

6. Antes do final da prova, você receberá uma folha de gabarito para a transcrição das respostas. Usando caneta azul ou preta, assinale a opção correspondente à resposta de cada uma das questões de múltipla escolha.

7. Cuidado para não errar no preenchimento da folha de gabarito. Se isso correr, avise o fiscal, que lhe fornecerá uma folha extra, com o cabeçalho devidamente preenchido.

8. **Não haverá tempo suplementar para o preenchimento da folha de gabarito**.

9. A **não devolução** da folha de gabarito e do caderno de questões implicará na **desclassificação do candidato**.

10. **Os alunos não estão autorizados a levar o caderno de questões.**

11. **Aguarde o aviso para iniciar a prova. Ao terminá-la, avise o fiscal e aguarde-o no seu lugar**.

12. No dia 21/12/2020, o gabarito desta prova será disponibilizado no site do MADAN (www.madan.com.br).

13. A partir do dia 21/12/2020, os 40 candidatos com as melhores pontuações serão notificados por telefone e por e-mail a fim de agendarem uma entrevista com os diretores do MADAN. Essa entrevista é a segunda etapa do processo de admissão, sendo obrigatório a presença de pelo menos um dos responsáveis pelo aluno. Somente após essa entrevista, a escola autorizará a matrícula do aluno. Caso a escola não consiga entrar em contato com o aluno ou com seus responsáveis em até 3 dias, sua pré-matrícula será cancelada.

14. Em caso de desistência, os suplentes serão imediatamente avisados por telefone e por e-mail.

Questão 1

Quantos números de 3 algarismos existem cuja soma dos algarismos é 25?

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

Questão 2

Calcule:

$$\sqrt{\left(\frac{2{,}1333\ldots}{53+\frac{1}{3}}\right)^{-3}}$$

a) 25
b) 5
c) 125
d) 169
e) 64

Questão 3

Um empreiteiro, encarregado da construção de duas estradas iguais em importância e dimensões, empregou 80 trabalhadores em cada uma. No fim de 50 dias, havia construído os 3/8 da primeira estrada e os 5/7 da segunda. Quantos operários da turma que trabalha na segunda estrada deve o empreiteiro juntar à primeira turma para que a construção fique pronta no fim de 120 dias, a contar do início da construção?

a) 11
b) 4
c) 16
d) 13
e) 8

Questão 4

Se $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$, determine o valor de $1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+\cdots$

a) $\frac{\pi^2}{7}$
b) $\frac{\pi^2}{8}$
c) $\frac{\pi^2}{9}$
d) $\frac{\pi^2}{10}$
e) $\frac{\pi^2}{12}$

Questão 5

Um número de seis algarismos começa à esquerda, pelo algarismo 1. O novo número, de seis algarismos, que se obtém transpondo o algarismo 1 para a direita, é o triplo do número primitivo. Quais dentre as alternativas abaixo representa o número primitivo?

a) 142875
b) 142857
c) 142856
d) 143865
e) 143856

Questão 6

Seja A um conjunto com 14 elementos e B um subconjunto de A com 6 elementos. O número de subconjuntos de A com um número de elementos menor ou igual a 6 e disjuntos de B é:

a) $2^8 - 9$
b) $2^8 - 1$
c) $2^8 - 2^6$
d) $2^{14} - 2^8$
e) 2^8

Questão 7

Num concurso, cada candidato fez uma prova de Português e uma de Matemática. Para ser aprovado o aluno tem que passar nas duas provas. Sabe-se que o número de candidatos que passaram em português é o quádruplo do número de aprovados no concurso. Os que passaram em matemática são o triplo do número de candidatos aprovados no concurso. Já aqueles que não passaram nas duas provas é a metade do número de aprovados no concurso. No total foram 260 pessoas realizando o concurso. Quantos candidatos foram reprovados no concurso?

a) 140
b) 160
c) 180
d) 200
e) 220

Questão 8

Simplificando a expressão

$$2.\left(x^2+\sqrt{x^4-1}\right)\left[\sqrt[3]{(x^2+1)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}+\sqrt[3]{(x^2-1)\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right]^{-2}$$

Para x > 1, obtemos:

a) $\sqrt{x}$
b) $\sqrt{x^2-1}$
c) $\sqrt[3]{x^2}$
d) $x\sqrt{x}$
e) $-\sqrt[3]{x^2}$

Questão 9

Considere a expressão

$$A = 123456782013^2 - 2.123456782010^2 + 123456782007^2$$

I. A soma dos algarismos de A é divisor do próprio A.
II. A quantidade de divisores positivos de A é um divisor de A.
III. O número A é negativo.
IV. O número $A^2 - 5A^3 + 4A$ é, necessariamente, um múltiplo de 640.

Leia atentamente as opções e marque a resposta certa. Estão erradas, apenas:

a) I e II
b) III e IV
c) I, II e IV
d) I, II e III
e) II, III e IV

Questão 10

Em uma classe com 35 estudantes pesquisou-se sobre os gostos relativos a matemática e literatura e constatou-se que:

• 7 homens gostam de matemática;

• 6 homens gostam de literatura;

• 5 homens e 8 mulheres não para ambos;

• há 16 homens na classe;

• 5 estudantes gostam de ambos; e

• 11 estudantes somente de matemática.

Quantas mulheres gostam apenas de literatura?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Questão 11

A soma dos algarismos de X = $\sqrt{2004.2002.1998.1996 + 36}$ é:

a) 12
b) 24
c) 36
d) 48
e) X não é natural

Questão 12

Considere três conjuntos A, B e C, tais que: n(A)=28, n(B)=21, n(C)=20, n($A \cap B$)=8, n($B \cap C$)=9, n($A \cap C$)=4 e n(($A \cap B \cap C$)=3. Assim sendo, o valor de n(($A \cup B$)$\cap$ C) é:

a) 3
b) 10
c) 20
d) 21
e) 24

Questão 13

Sejam A um conjunto com 8 elementos e B um conjunto tal que A U B contenha 12 elementos. Qual o número de elementos de $P(B \backslash A) \cup P(\phi)$? Obs 1: Se X é um conjunto, $P(X)$ denota o conjunto de todos os subconjuntos de X. Obs 2: $B \backslash A = \{x | x \notin A; x \in B\}$

a) 8
b) 16
c) 20
d) 17
e) 9

Questão 14

Os ângulos internos de um hexágono convexo estão em progressão aritmética. Calcule o maior valor inteiro para a razão dessa progressão.

a) 22^o
b) 24^o
c) 23^o
d) 25^o
e) 27^o

Questão 15

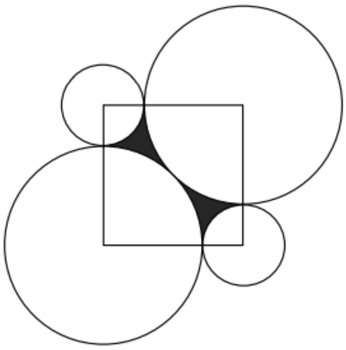
Determine a soma dos algarismos da solução inteira da equação

$$\sqrt{\frac{x-2004}{15}}+\sqrt{\frac{x-2005}{14}}+\sqrt{\frac{x-2006}{13}}=\sqrt{\frac{x-15}{2004}}+\sqrt{\frac{x-14}{2005}}+\sqrt{\frac{x-13}{2006}}$$

a) 10
b) 8
c) 12
d) 16
e) 6

Questão 16

Considere um quadrado de lado 1. Foram construídos dois círculos de raio R com centros em dois vértices opostos do quadrado e tangentes entre si; dois outros círculos de raio r com centros nos outros dois vértices do quadrado e tangentes aos círculos de raio R, como ilustra a figura abaixo.



A área da região sombreada é:

a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\pi$
b) $\left(\sqrt{2}-1\right)\pi$
c) $1+\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)\pi$
d) $1+\left(\sqrt{2}-1\right)\pi$
e) $1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\pi$

Questão 17

Seja ABCDEF um hexágono regular. A reta EF determina dois semiplanos. No semiplano que não contém A (relativo a EF), toma-se o ponto P tal que APD=90º, PD=8 e AP=6 . Calcule BP.

a) 10
b) $4+3\sqrt{3}$
c) $3+4\sqrt{3}$
d) 12
e) $8+6\sqrt{3}$

Questão 18

Assinale o resto da divisão por 8 da soma abaixo:

$$138947^{76}+985637^{43}$$

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

Questão 19

Num quadrilátero qualquer ABCD, P é ponto médio de AD e M é ponto médio de BC. Unindo-se P a C e M a A, obtém-se o quadrilátero APCM. Sendo a área de ABCD igual a $18m^2$, qual a área de APCM em m^2?

a) 6
b) 9
c) 12
d) 15
e) 16

Questão 20

Sabendo que $x^3 - x - 1 = 0$, o valor de

$$\sqrt[3]{3x^2 - 4x} + x.\sqrt[4]{2x^2 + 3x + 2}$$

É igual a:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Questão 21

Em um setor circular de 45º, limitado pelos raios OA e OB iguais a R, inscreve-se um quadrado MNPQ, onde MN está apoiado em OA e o ponto Q sobre o raio OB. Então, o perímetro do quadrado é:

a) $4R$
b) $2R$
c) $2R\sqrt{2}$
d) $4R\sqrt{5}$
e) $\frac{4R\sqrt{5}}{5}$

Questão 22

Numa cidade constatou-se que as famílias que consomem arroz não consomem macarrão. Sabe-se que: 40% das famílias consomem arroz; 30% consomem macarrão; 15% consomem feijão e arroz; 20% consomem feijão e macarrão; 60% consomem feijão.

A porcentagem correspondente às famílias que não consomem esses três produtos é:

a) 10%
b) 3%
c) 15%
d) 5%
e) 12%

Questão 23

Considere que ABC é um triângulo retângulo em A, de lados AC=b e BC=a. Seja H o pé da perpendicular traçada de A sobre BC, e M o ponto médio de AB, se os segmentos AH e CM cortam-se em P, a razão $\frac{AP}{PH}$ será igual a:

a) $\frac{a^2}{b^2}$
b) $\frac{a^3}{b^2}$
c) $\frac{a^2}{b^3}$
d) $\frac{a^3}{b^3}$
e) $\frac{a}{b}$

Questão 24

Sejam a e b números reais tais que:

(i) a, b e a + b formam, nessa ordem, uma PA;

(ii) 2^a, 16 e 2^b formam, nessa ordem, uma PG.

Então o valor de a é:

a) 8/3
b) 7/3
c) 5/3
d) 4/3
e) 2/3

Questão 25

Sejam A e B subconjuntos não vazios de R, e considere as seguintes afirmações:

I – $(A - B)^C \cap (B \cup A^C)^C = \emptyset$;

II – $(A - B^C)^C = B - A^C$;

III - $[(A^C - B) \cap (B - A)]^C = A$;

Sobre essas afirmações podemos afirmar que:

a) Apenas a afirmação I é verdadeira
b) Apenas a afirmação II é verdadeira
c) Apenas a afirmação III é verdadeira
d) Todas as afirmações são verdadeiras
e) Apenas as afirmações I e III são verdadeiras

Questão 26

Os comprimentos das circunferências de uma sequência de círculos concêntricos formam uma progressão aritmética de razão 2. Os raios desses círculos formam uma:

a) progressão geométrica de razão ½
b) progressão geométrica de razão 1/π
c) progressão aritmética de razão 2
d) progressão aritmética de razão π
e) progressão aritmética de razão 1/π

Questão 27

Dado um quadrado ABCD, de lado a, marcam-se os pontos E sobre o lado AB, F sobre o lado BC, G sobre o lado CD e H sobre o lado AD, de modo que os segmentos formados AE, BF, CG e DH tenham comprimento igual a $\frac{3a}{4}$. A área do novo quadrilátero formado pelas interseções dos segmentos AF, BG, CH, e DE mede:

a) $\frac{a^2}{25}$
b) $\frac{a^2}{18}$
c) $\frac{a^2}{16}$
d) $\frac{a^2}{9}$
e) $\frac{2a^2}{9}$

Questão 28

Numa progressão geométrica de razão q sabemos que $a_1 = \frac{1}{q}$ e $a_1 . a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^5$ e o produto dos n primeiros termos é q^{20}. Então a soma dos n primeiros termos é igual a:

a) $\frac{3^8 - 2^8}{2.3^6}$
b) $\frac{3^8 - 2^8}{2.3^8}$
c) $\frac{3^8 - 2^6}{2.3^6}$
d) $\frac{3^6 - 2^6}{2.3^6}$
e) $\frac{3^6 - 2^6}{2.3^8}$

Questão 29

Suponha que x, y e z estejam em PG de razão r e $x \neq y$. Se $x, 2y, 3z$ estão em PA, então r é igual a:

a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{2}$
d) 2
e) 4

Questão 30

Seja $\{F_n\}$ uma sequência definida recursivamente por $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, onde $F_{18} = 2584$ e $F_{21} = 10946$, calcule o valor de F_{22}.

a) 12225
b) 13530
c) 17711
d) 20412
e) 22121

Questão 31

A sequência X_n está definida pelas seguintes condições:

$X_1 = 19$, $X_2 = 97$; $X_{n+2} = X_n - \frac{1}{X_{n+1}}$.

Determine n no qual o termo X_n é nulo.

a) 1840
b) 1841
c) 1842
d) 1843
e) 1844

Questão 32

Um ciclo de três conferências teve sucesso constante, isto é, em cada sessão havia o mesmo número de participantes. No entanto, a metade dos que compareceram à primeira não voltou mais; um terço dos que compareceram à segunda conferência assistiu apenas a ela e um quarto dos que compareceram a terceira não assistiu nem à primeira nem à segunda. Sabendo que havia 300 inscritos e que cada um assistiu a pelo menos uma conferência, determine quantas pessoas compareceram às três conferências.

a) 37
b) 38
c) 39
d) 40
e) 41

Questão 33

O número N = 11111 . . . 11 possui 5999 dígitos, todos iguais a 1. O resto da divisão de N por 7 é:

a) 1
b) 2
c) 4
d) 5
e) 6

Questão 34

Suponha que, em uma prova, um aluno gaste para resolver cada questão, a partir da segunda, o dobro de tempo gasto para resolver a questão anterior. Suponha ainda que, para resolver todas as questões, exceto a última, ele tenha gasto 63,5 minutos e para resolver todas as questões, exceto as duas últimas, ele tenha gasto 31,5 minutos. De quantas questões é composta a prova?

a) 16 questões
b) 14 questões
c) 7 questões
d) 8 questões
e) 9 questões

Questão 35

Para a e b inteiros, sabendo que 7 é divisor de $a + 3b$, qual o resto da divisão de $13a + 11b$ por 7?

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

Questão 36

Considere um quadrilátero ABCD cujas diagonais AC e BD medem, respectivamente, 5cm e 6cm. Se R, S, T e U são os pontos médios dos lados do quadrilátero dado, então o perímetro do quadrilátero RSTU vale:

a) $22cm$
b) $5{,}5cm$
c) $8{,}5cm$
d) $11cm$
e) $13cm$

Questão 37

Quantos são os números inteiros de 2 algarismos que são iguais ao triplo do produto de seus algarismos?

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

Questão 38

Seja α raiz da equação do segundo grau $x^2 - x - 1 = 0$, calcule o valor de $\alpha^7 - 13\alpha$.

a) 3
b) 5
c) 8
d) 13
e) 21

Questão 39

Sobre o número X = $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$. Podemos afirmar que:

a) é um número natural
b) é um número racional maior que 3
c) é um número racional menor que 2
d) é um número racional maior que 2 e menor que 3
e) é um número irracional

Questão 40

Sejam x, y números inteiros tais que:

$$x^3+y^3+(x+y)^3+30xy=2000$$

Então x+y vale:

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

RASCUNHO

RESOLUÇÃO MADAN 2021

PROVA DE ADMISSÃO

MADAN

1	C	11	D	21	E	31	E
2	C	12	B	22	D	32	A
3	E	13	B	23	A	33	B
4	B	14	C	24	A	34	D
5	B	15	C	25	A	35	A
6	A	16	E	26	E	36	D
7	E	17	B	27	A	37	C
8	C	18	D	28	A	38	C
9	B	19	B	29	B	39	A
10	B	20	B	30	C	40	E

Prova A

1. ALTERNATIVA C

Se nenhum dos três algarismos for 7, teremos a maior soma dos algarismos quando 888(8+8+8=24), portanto, com certeza um dos algarismos deverá ser 9. Com este pensamento, teremos os números: 997, 779, 777, 988, 878 e 889. $\boxed{n = 6}$

2. ALTERNATIVA C

$$x \;=\; 2,1333 \implies 21 + \frac{1}{3} \implies 10x = \frac{64}{3} \therefore x = \frac{64}{30}$$

Então:

$$\left(\frac{\frac{64}{30}}{\frac{160}{3}}\right)^{-3} = \left(\frac{\cancel{64}^{4}}{\cancel{16}00}\right)^{-3} = \left(\frac{100}{4}\right)^{3} = (25)^3 = \sqrt{(25)^3} = (5)^3 = \boxed{125}$$

3. ALTERNATIVA E

Como, inicialmente, a turma tem 80 trabalhadores durante 50 dias e a proporção de capacidade entre elas é $\frac{5/7}{3/8} = \frac{40}{21}$. Logo, a segunda turma tem mais capacidade que a primeira.

Se mantida os mesmo 80 trabalhadores, a turma 1 completa x da estrada:

50 dias: $\frac{3}{8}$ estrada

70 dias: $x \therefore x = \frac{70 \cdot \frac{7}{8}}{50} = \frac{21}{40}$

Ou seja, restaria $\frac{5}{8} - \frac{21}{40} = \frac{1}{10}$ da estrada para ser construída pela turma 1.

Assim, para que a construção seja finalizada ao fim dos 120 dias, y funcionários da turma 2 deverá construir $\frac{1}{10}$ da pista 1. Para a turma 2:

50 dias: $\frac{5}{7}$ estrada

70 dias: $z \therefore z = 1$

Logo, como 80 trabalhadores da turma 1 construiriam 10 décimos da pista, $\boxed{x = 8}$ trabalhadores construiriam 1 décimo da pista 1 que falta.

4. ALTERNATIVA B

1°) $S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = S_{par} + S_{impar}$

2°) $S_{par} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots\right) = \frac{1}{4}S \implies S_{impar} = \frac{3}{4}S = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \boxed{\frac{\pi^2}{8}}$

5. ALTERNATIVA B

$$\begin{cases} A = 1abcde & \Longrightarrow \quad A = 1\underbrace{abcde}_{x} = 10^5 + x \\ B = abcde1 & \qquad\quad B = 10x + 1 \end{cases}$$

Do enunciado: 8 = 3A

$$10x + 1 = 3 \quad 7x = 299999 \quad \boxed{x = 420857} \therefore \boxed{A = 142857}$$

6. ALTERNATIVA A

1º) Número de subconjuntos de A disjuntos de B:
$2^{14-6} = 2^8$;

2º) Número de subconjuntos com 7 elementos e disjuntos de B:
$C_{8,7} = 8$.

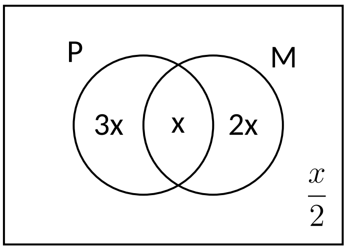
3º) Número de subconjuntos com 8 elementos e disjuntos de B:
$C_{8,8} = 1$.

4º) Total = $2^8 - 8 - 1 = \boxed{2^8 - 9}$.

7. ALTERNATIVA E

1º)

Diagrama:
x = nº de aprovados no concurso



2º) $260 = 4x + 2x + \frac{2}{x} = 6,5x \implies x = \frac{260 \cdot 2}{13}$

3º) Nº de reprovador $= 260 - 40 = \boxed{220}$

8. ALTERNATIVA C

$$2(x^2+\sqrt{x^4-1})\left[\sqrt[3]{\frac{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}{x}}+\sqrt[3]{\frac{(x^2-1)\cdot\sqrt{x^2-1}}{x}}\right]^{-2}$$

$$2(x^2+\sqrt{x^4-1})\left[\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{\sqrt{(x^2+1)^3}}+\sqrt[3]{\sqrt{(x^2-1)^3}}\right)\right]^{-2}$$

$$2(x^2+\sqrt{x^4-1})\left[\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)^{-2}\right]$$

$$2(x^2+\sqrt{x^4-1})\left[\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\left(x^2\cancel{+1}+x^2\cancel{-1}+2\sqrt{x^4-1}\right)^{-1}\right]$$

$$\cancel{2(x^2+\sqrt{x^4-1})}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\frac{1}{\cancel{2(x^2+\sqrt{x^4-1})}}$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}$$

9. ALTERNATIVA B

Seja x = 123456782010:

$$A = (x+3)^2 - 2x^2 + (x-3)^2 = \cancel{x^2} + \cancel{6x} + 9 \cancel{-2x^2} \cancel{+x^2} \cancel{-6x} + 9 = 18$$

I. V

$1+8=9$, que é divisor de 18.

II. F

$18 = 2 \cdot 3^2 \implies$ Possui $(1+1)(2+1) = 6$ divisores positivos, que é divisor de 18.

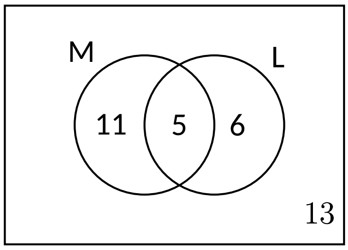
III. F 18 é positivo;

IV. V

$A^2 - 5A^3 + 4A = A(A - 5A^2 + 4) = A(A-1)(5A-4) = 18 \cdot 17 \cdot 86 \therefore$ Não é múltiplo de 640. As erradas são II e III.

10. ALTERNATIVA B

16 Homens
19 Mulheres



M: Matemática
L: Literatura

$$5 + 6 + 7 - x = 16$$

3 mulheres gostam de ambos
x = 2 homens gostam de ambos

$$3 + 11 - (7 - 2) + y + 8 = 19$$
$$\boxed{y = 2}$$

11. ALTERNATIVA D

$$x = \sqrt{2004 \cdot 2002 \cdot 1779 \cdot 1776736} = \sqrt{(2000+4)\cdot(2000+2)\cdot(2000-2)\cdot(2000-4)+36}$$

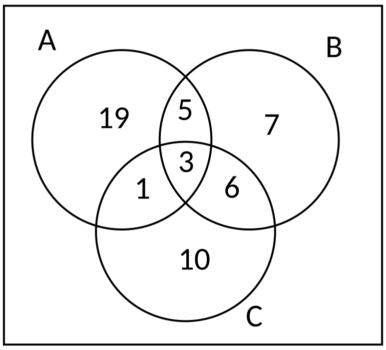
$$x = \sqrt{(2000^2-4^2)\cdot(2000^2-2^2)+36} = \sqrt{2000^2\cdot 2000^2 - 2^2\cdot 2000^2 - 4^2\cdot 2000^2 + 4^2\cdot 2^2 + 36}$$

$$x = \sqrt{2000^4 - 20\cdot 2000^2 + 100} = \sqrt{(2000^2-10)^2} = 2000^2 - 10 = 3999990$$

A soma dos algarismos é $3+9+9+9+9+9+0 = \boxed{48}$

12. ALTERNATIVA B

1º)



2º) Pelo diagrama, a região pedida é a hachurada.

13. ALTERNATIVA B

1º) n(B\A) = 12 - 8 - 4.

2º) n(P(B\A)) = $2^{n(B \sim A)}$ - 1 = 2^4 - 1 = 16 - 1.

3º) n(P(ϕ)) = 2^0 = 1.

4º) n(P(B\A) $\cup$P(ϕ) = 16 - 1 + 1 = 16, pois são disjuntos.

14. ALTERNATIVA C

Sejam $(\alpha, \alpha + r, \alpha + 2r, \dots, \alpha + 5r)$ os ângulos internos e r a razão. Tem-se:

$$\sum i = (6-2) \cdot 180^\circ$$
$$6\alpha + 15r = 720^\circ$$

$$\alpha = 120^\circ - \frac{5}{2}r \tag{1}$$

Como o polígono é convexo:

$$\alpha + 5r < 180^\circ \tag{2}$$

Substituindo (1) em (2):

$$120^\circ - \frac{5}{2}r + 5r < 180^\circ$$
$$\frac{5}{2}r < 60^\circ$$
$$r < 24^\circ$$

O maior inteiro que satisfaz a condição acima é $\boxed{r = 23^\circ}$

15. ALTERNATIVA C

Substituindo x por a + 2019, temos:

$$\sqrt{\frac{a+15}{15}}+\sqrt{\frac{a+14}{14}}+\sqrt{\frac{a+13}{13}}=\sqrt{\frac{a+2004}{2004}}+\sqrt{\frac{a+2005}{2005}}+\sqrt{\frac{a+2006}{2006}}$$
$$\implies \sqrt{\frac{a}{15}+1}+\sqrt{\frac{a}{14}+1}+\sqrt{\frac{a}{13}+1}=\sqrt{\frac{a}{2004}+1}+\sqrt{\frac{a}{2005}+1}+\sqrt{\frac{a}{2006}+1}$$

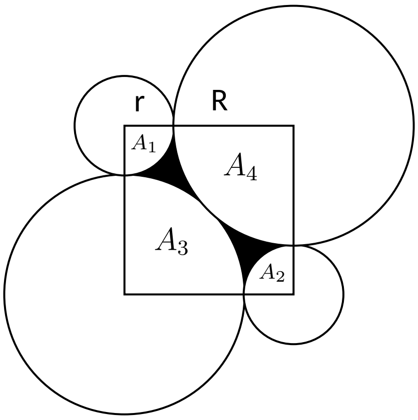
É óbvio que para a = 0, a equação é verificada.

Para a > 0, temos 1° membro > 2° membro.

Para -13 $\leqslant$a < 0, temos 1° membro < 2° membro.

Logo, a = 0. Ou seja, x = 2019. Assim, 2 + 0 + 1 + 9 = $\boxed{12}$

16. ALTERNATIVA E



$$A = 1^2 - (A_1 + A_2) - (A_3 + A_4)$$

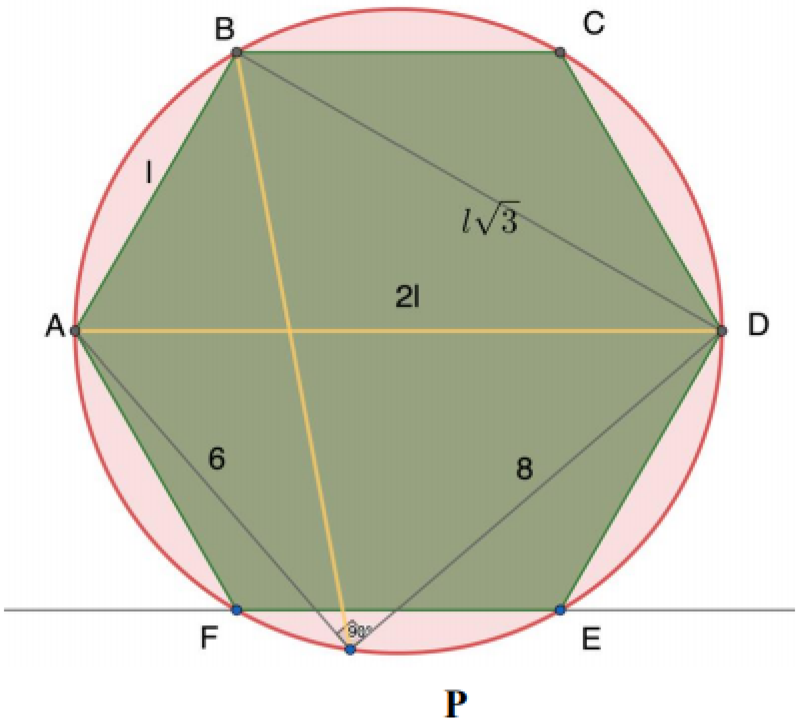
$$A = 1 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$A = 1 - \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{4 - 4\sqrt{2} + 2}{4} + \frac{2}{4}\right)$$

$$A = 1 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2 - \sqrt{2})$$

$$\boxed{A = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \cdot \pi}$$

17. ALTERNATIVA B



Como $\mathbf{A\hat{P}D = 90}^\circ$, o triângulo APD está inscrito na circunferência de diâmetro AD, que é a mesma que circunscreve o hexágono ABCDEF.

No hexágono, se $\mathbf{AB = l}$, $\mathbf{AD = 2l}$ e $\mathbf{BD = l\sqrt{3}}$.

O quadrilátero ABDP é inscritível. Pelo teorema de Ptolomeu:

$$\mathbf{BP \cdot AD = AB \cdot PD + BD \cdot AP}$$

$$\mathbf{BP \cdot 2l = 8 \cdot l + l\sqrt{3} \cdot 6}$$

$$\boxed{\mathbf{BP = 4 + 3\sqrt{3}}}$$

18. ALTERNATIVA D

Seja N_1 = 138947

$$N_1 \equiv 3mod(8) \therefore N_1^2 \equiv (3)^2 \therefore N_1^2 \equiv 9 \therefore N_1^2 \equiv 1mod(8)$$

$$\implies (N_1^2)^{39} = (1)^{38}(mod 8) \therefore N_1 \equiv 1mod(9)$$

Logo 138947^{76} deixa resto 1 na divisão por 8.

Seja N_2 = 985637

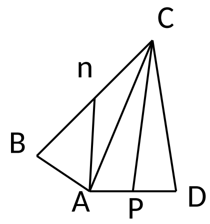
$$N_2 \equiv 5mod(8) \therefore N_2 \equiv 25mod(8) \therefore N_2 \equiv 1(mod(8))$$

$$\implies (N_2^2)^{21} \equiv (1)^{21}mod(8) \therefore N_2^{42} \equiv 1mod(8)$$

$$\implies N_2^{42} \cdot N_2 \equiv 1 \cdot N_2 mod(8) \therefore N_2^{43} \equiv N_2 mod(8) \therefore N_2^{43} \equiv 5mod(8)$$

Logo 985637^{43} deixa resto 5 na divisão par 8. Logo, somando os resultados o valor obtido é $\boxed{6}$.

19. ALTERNATIVA B



Triângulos de mesma altura e bases diferentes(Comparação de áras S)

$$S_{ABC} = 2S_{ABn} = 2S_{AnC}$$

$$S_{ACD} = 2S_{APC} = 2S_{PCD}$$

$$S_{ABn} = S_{AnC}$$

$$S_{APc} = S_{PCD}$$

$S_{ABCD} = S_{APCn} + S_{ABn} + S_{PCD} \implies S_{ABCD} = S_{ABCn} + S_{AnC} + S_{APC}$

Mas $S_{AnC} + S_{APC} = S_{APCn} \implies S_{ABCD} = 2S_{APCn} \implies \boxed{S_{APCn} = \frac{18}{2} = 9}$

20. ALTERNATIVA B

$$x^3-x-1=0 \implies x^3-3x^2+3x-1=4x-3x^2 \implies (x-1)^2=4x-3x^2 \implies 3x^2-4x=(1-x)^3$$

$$x^3=x+1 \implies x^4\sqrt{2x^2+3x+2}=\sqrt[4]{2(x^3)^2+3x^5+2x^4}=\sqrt[4]{2(x+1)^2+3x^5+2x^4}$$

$$=\sqrt{2x^4+3x^2x^3+2x^2+4x+2}=\sqrt[4]{2x^4+3x^2(1+x)2x^2+4x+2}=\sqrt[4]{2x^4+3x^3+5x^2+4x+2}$$

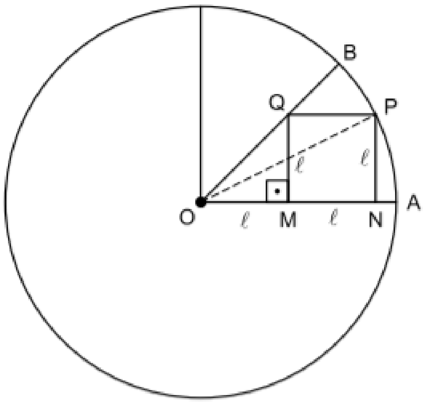
$$=\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+4x+1+x^4-x^3-x^2+1}=\sqrt[4]{(x+1)^4+(1-x)(1+x)-x^3(1-x)}$$

$$=\sqrt[4]{(x+1)^4+(1+\cancel{x}-x^3)(1-x)}=\sqrt[4]{(x+1)^4}$$

Logo a expressão vale $\sqrt[3]{(1-x)^3)}+\sqrt[4]{(1+x)^4}=1-\cancel{x}+1+\cancel{x}=\boxed{2}$

21. ALTERNATIVA E

Seja l a medida do lado do quadrado e R a medida do raio da circunferência.



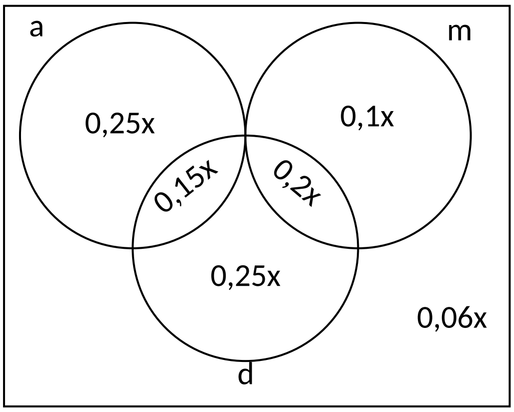
1) O triângulo OMQ é retângulo e isósceles e, portanto, OM = MQ = l.
2) No triângulo retângulo ONP tem-se

$$OP^2 = ON^2 + NP^2 \implies R^2 = (2 \cdot l)^2 + l^2 \implies R = l \cdot \sqrt{5} \leftrightarrow l = \frac{R}{\sqrt{5}} = \frac{R \cdot \sqrt{5}}{5}$$

Assim, o perímetro do quadrado é $4l = \frac{4R\sqrt{5}}{5}$.

22. ALTERNATIVA D

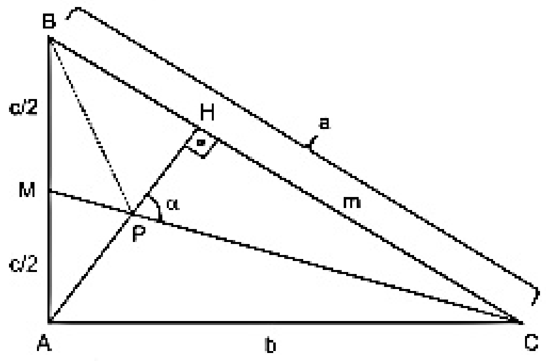
1°) Diagrama arroz e macarrão são disjuntos



$x =$ n° total de famílias

2°) $0,05 \cdot x =$ fração das famílias que não consomem esses três produtos.

23. ALTERNATIVA A



CM é mediana, logo os triângulos BMC e ACM possuem a mesma área, os triângulos PMB e PMA possuem a mesma área, o que nos permite concluir que os triângulos APC e BPC também possuem a mesma área.

Na figura, temos:

$$b^2 = a \cdot m \implies m = \frac{b^2}{a}$$

$$A_{(BPC)} = A_{(APC)}$$

$$\frac{a \cdot PH}{2} = \frac{AP \cdot PC \cdot sen(180-\alpha)}{2}$$

$$\frac{AP}{PH} = \frac{a}{PC \cdot sen(180-\alpha)} = \frac{a}{PC \cdot sen(\alpha)} = \frac{a}{m} = \frac{a}{\frac{b^2}{a}}$$

$$\frac{AP}{PH} = \frac{a^2}{b^2}$$

24. ALTERNATIVA A

1°) $2 \cdot b = a + a + b \implies b = 2 \cdot a$

2°) $(16)^2 = 2^a \cdot 2^b \implies 2^8 = 2^{a+b} = 2^{3 \cdot a} \implies \boxed{a = \frac{8}{3}}$

25. ALTERNATIVA A

I Verdadeira.

$$(A - B)^C = (A \cap B^C)^C = A^C \cup B$$

$$(B \cup A^C)^C = B^C \cap A$$

$$(A^C \cup B) \cap (B^C \cap A) = [(A^C \cup B) \cap B^C] \cap A =$$

$$[(B^C \cap A^C) \cup \cancelto{\emptyset}{(B^C \cap B)}] \cap A = (B^C \cap A^C) \cap A =$$

$$B^C \cap \cancelto{\emptyset}{(A^C \cap A)} = B^C \cap \emptyset = \emptyset$$

II Falsa.

$$(A - B^C)^C = (A \cap B)^C = (A^C \cap B^C)$$

III Falsa.

$$[(A^C - B) \cap (B - A)]^C = [(A^C \cap B^C) \cap (B \cap A^C)]^C = (A \cup B) \cup (A \cup B^C) = U$$

Apenas a afirmação I é verdadeira

26. ALTERNATIVA E

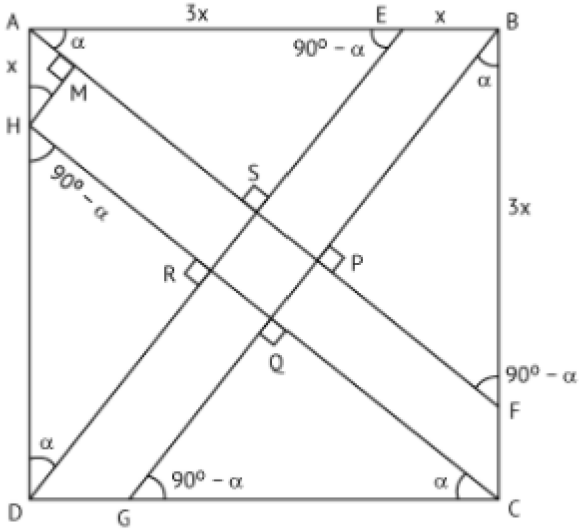
1°) Comprimentos: $(2 \cdot \pi \cdot r_1,\ 2 \cdot \pi \cdot r_2,\ 2 \cdot \pi \cdot r_3,\ ...)$.

$$2 \cdot \pi \cdot r_2 - 2 \cdot \pi \cdot r_1 = 2 \implies r_2 - r_1 = \frac{2}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{\pi}$$

Por indução, $\boxed{r_n - r_{n-1} = \frac{1}{\pi}}$ $\implies$ PA de razão $\frac{1}{\pi}$

27. ALTERNATIVA A

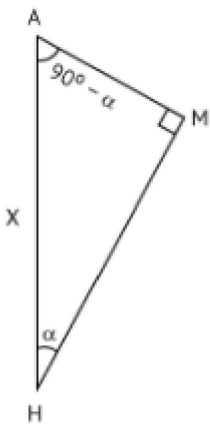
$B\hat{A}F = G\hat{B}C = H\hat{C}G = E\hat{D}A = \alpha$. Logo, $B\hat{P}F = E\hat{S}A = H\hat{R}D = G\hat{Q}C = 90°$, e então PQRS é retângulo.



Traçando uma paralela a $\overline{SR}$, pelo ponto H, teremos:

$$\overline{MH} = x \cdot cos(\alpha) = x \cdot \left(\frac{4 \cdot x}{5 \cdot x}\right) = \frac{4}{5} \cdot x$$

$$\implies \overline{MH} = \overline{SR} = \frac{4 \cdot x}{5} = \frac{a}{5}$$



Fazendo a mesma construção, temos que os lados do quadrilátero PQRS são iguais a $\frac{a}{5}$, e então PQRS é quadrado. Logo sua área é $\left(\frac{a}{5}\right)^2 = \frac{a^2}{25}$

28. ALTERNATIVA A

1º) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \implies a_1 \cdot a_n = a_1^2 \cdot q^{n-1} = q^{n-3} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^5$

2º) $P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}} = q^{-n} \cdot q^{\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}} = q^{\frac{n^2}{2}-\frac{3\cdot n}{2}} = q^{20}$
$\implies n^2 - 3\cdot n = 40 \implies n\cdot(n-3) = 8\cdot 5 \implies \boxed{n=8}$

3º) $q^{n-3} = q^5 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^5 \implies q = \frac{2}{3}$

4º) $S_n = \dfrac{a_1\cdot(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)}{q-q^2} = \dfrac{3^8-2^8}{3^8\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)-\dfrac{4}{9}} = \dfrac{3^8-2^8}{2\cdot 3^6}$

29. ALTERNATIVA B

1°) PA: $4 \cdot y = x + 3 \cdot z$

2°) $r = \dfrac{y}{x} = \dfrac{z}{y} \implies x = \dfrac{y}{r}$ e $z = r \cdot y$; $r \neq 0$ e $r \neq 1$ $(x \neq y)$

3°) $4 \cdot y = \dfrac{y}{r} + 3 \cdot r \cdot y \implies 4 = \dfrac{1}{r} + 3 \cdot r \implies 3 \cdot r^2 - 4 \cdot r + 1 = 0$

$\implies r = 1$ (não convém) ou $r = \dfrac{1}{3}$

30. ALTERNATIVA C

$$F_{22} = F_{21} + F_{20}$$

1°)

$$\begin{cases} F_{21} = F_{19} + F_{20} \\ F_{20} = F_{19} + F_{18} \end{cases} \implies 2 \cdot F_{20} = F_{21} + F_{18} \implies F_{20} = \frac{F_{21} + F_{18}}{2}$$

2°) $F_{22} = F_{21} + \frac{F_{21}}{2} + \frac{F_{18}}{2} = \frac{3 \cdot F_{21}}{2} + \frac{F_{18}}{2} = 16419 + 1292 = 17711$

31. ALTERNATIVA E

1°) $X_{n+2} \cdot X_{n+1} = X_{n+1} \cdot X_{n-1}$

2°) Seja $a_n = X_{n+1} \cdot X_n$

3°) $a_{n+1} = a_n - 1 \implies a_n - a_{n+1} = 1 \cdot (PA\ r = -1)$

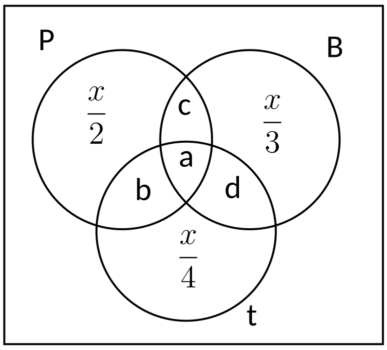
4°) Se X_n é nulo, $a_n = 0 \implies a_{n+1} = -1$

5°) $a_1 = X_1 \cdot X_2 = 19 \cdot 97 = 1843$

6°) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r = 1843 - (n-1)$. Para $a_n = 0 \implies 1843 = (n-1) \implies \boxed{n = 1844}$

32. ALTERNATIVA A

1°) Diagrama:



2°)

$$\begin{aligned} c &= 300 - \frac{11 \cdot x}{6}; \\ d &= 300 - \frac{14 \cdot x}{12}; \\ b &= 300 - \frac{7x}{4}; \\ a &= \frac{49 \cdot x}{12} - 600; \end{aligned}$$

3°) Como a é inteiro, x é do tipo $12K$ (K inteiro):

$$\begin{aligned} c &= 300 - 22K \geq 0 \\ d &= 300 - 19K \geq 0 \\ b &= 300 - 21K \geq 0 \\ a &= 49K - 600 \geq 0 \end{aligned}$$

4°)

$$\begin{aligned} K &\leq 13,63 \\ K &\leq 15,78 \\ K &\leq 14,28 \\ K &\geq 12,24 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{K = 13} \Longrightarrow \boxed{a = 37}$$

33. ALTERNATIVA B

$$\begin{array}{l|l}
1111111\ldots & 7 \\ \cline{2-2}
41 & 1587301 \\
\ \ 61 & \\
\ \ \ \ 51 & \\
\ \ \ \ \ \ 21 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 01 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 11 &
\end{array}$$

Note que, de seis em seis números ”1”, o resto é zero. Desse modo, começa-se tudo de novo. Esse é o padrão:

$$1465201146520...$$

O que devemos fazer é dividir por 6 para ver quantas vezes esse padrão se repete.

$$\begin{array}{l|l}
5999 & 6 \\ \cline{2-2}
59 & 999 \\
\ \ 59 & \\
\ \ \ \ 59 & \\
\ \ \ \ \ \ 5 &
\end{array}$$

Perceba que repete 999 vezes, porém, no fim sobram 5 números (1, 4, 6, 5 e 2), sendo 2 o último e, portanto, o resto.

$$\boxed{r = 2}$$

34. ALTERNATIVA D

1°) $t_n = t_1 \cdot 2^{n-1}$

2°) $\sum_{i=1}^{n-1} t_i = \dfrac{t_1 \cdot (2^{n-1} - 1)}{2-1} = 63,5\, min$ (*)

3°) $\sum_{i=1}^{n-2} t_i = \dfrac{t_1 \cdot (2^{n-2} - 1)}{2-1} = 31,5\, min$ (**)

4°) De $\dfrac{(*)}{(**)}$: $\dfrac{t_1 \cdot (2^{n-1} - 1)}{t_1 \cdot (2^{n-2} - 1} = \dfrac{63,5}{31,5} \implies 63 \cdot 2^{n-2} - 31,5 = 63,5 \cdot 2^{n-2} - 63,5$

$\implies 2^{n-2} \cdot 0,5 = 32 \implies 2^{n-3} = 2^5 \implies \boxed{n = 8}$

$\therefore$ A prova é composta por 8 questões.

35. ALTERNATIVA A

Temos que $7|a + 3b$, além disso é conhecido que $7|14a + 14b \implies$ Logo $7|13a + 11b$. Logo, resto 0.

36. ALTERNATIVA D

Ou seja, os **segmentos RU e ST** são paralelos à **diagonal BD**, assim como os **segmentos RS e UT** são paralelos à **diagonal AC**.

Com essas informações, temos que:

$$RU = \frac{BD}{2}$$
$$RU = \frac{6}{2}$$

RU = 3 cm

$$ST = \frac{BD}{2}$$
$$ST = \frac{6}{2}$$

ST = 3 cm

$$RS = \frac{AC}{2}$$

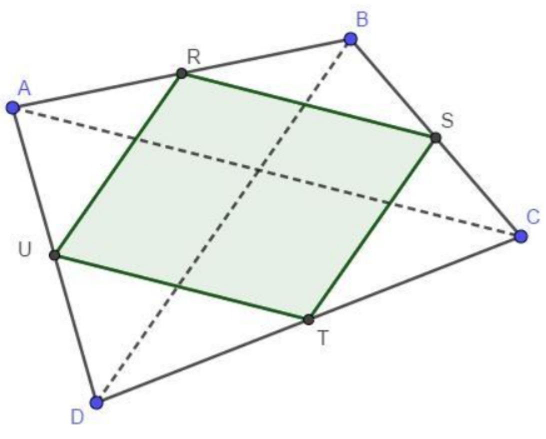
RS = 5/2 cm

$$UT = \frac{AC}{2}$$

UT = 5/2 cm

Sabemos que o **perímetro** é igual à **soma de todos os lados** de uma figura. Portanto, podemos concluir que o **perímetro do quadrilátero RSTU** é igual a:

$$2P = 3 + 3 + \frac{5}{2} + \frac{5}{2}$$
$$2P = 6 + 5$$
$$P = 11\ cm.$$



37. ALTERNATIVA C

Seja esse número da forma $AB : 10 \cdot A + B$.

$10 \cdot A + B = 3 \cdot AB$. Isolando A, teremos: $A = \dfrac{B}{3 \cdot B - 10}$. Aplicando valores à "B"de 0 à 9, temos que a equação só se verifica para $B = 4$ e $B + 5$.

$$B = 4 \implies A = \frac{4}{2} = 2 \qquad B = 5 \implies A = \frac{5}{5} = 1$$

Logo, 14 e 24 são os números.

$$\implies \boxed{n = 2}$$

38. ALTERNATIVA C

Se α é uma raíz, seja α' a outra raíz, tal que $\alpha + \alpha' = 1$, $\alpha \cdot \alpha' = -1$ e $\alpha^2 = \alpha + 1$.

$$\alpha^7 - 13 \cdot \alpha = \alpha \cdot (\alpha^6 - 13) = \alpha \cdot [(\alpha + 1)^3 - 13] = \alpha \cdot [\alpha^3 + 3 \cdot \alpha^2 + 3 \cdot \alpha - 12]$$
$$= \alpha \cdot [\alpha \cdot \alpha^2 + 3 \cdot (\alpha + 1) + 3 \cdot \alpha - 12] = \alpha \cdot [\alpha \cdot (\alpha + 1) + 6 \cdot \alpha - 9]$$
$$= \alpha \cdot (\alpha^2 + 7 \cdot \alpha - 9) = \alpha \cdot (8 \cdot \alpha - 8) = -8 \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha) = -8 \cdot \alpha \cdot \alpha' = -8 \cdot (-1) = 8$$

$$\boxed{\alpha^7 - 13 \cdot \alpha = 8}$$

39. ALTERNATIVA A

$$X = \sqrt{3 + 2 \cdot \sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2 \cdot \sqrt{2}}$$

$$X^2 = 3 + \cancel{2 \cdot \sqrt{2}} - 2 \cdot \sqrt{9 - 8} + 3 - \cancel{2 \cdot \sqrt{2}} = 6 - 2$$

$$X^2 = 4 \implies X = 2$$

40. ALTERNATIVA E

$$x^3 + y^3 + (x+y)^3 + 30 \cdot x \cdot y = 2000$$
$$\implies x^3 + y^3 + x^3 + y^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y^2 + 30 \cdot x \cdot y = 2000$$

$$\implies 2 \cdot (x+y)^3 - 3 \cdot x^2 \cdot y - 3 \cdot x \cdot y^2 + 30 \cdot x \cdot y = 2000$$
$$\implies 2 \cdot (x+y)^3 - 3 \cdot x^2 \cdot y - 3 \cdot x \cdot y^2 + 30 \cdot x \cdot y - 2000 = 0$$
$$\implies 2 \cdot [(x+y)^3 - 1000] - 3 \cdot x \cdot y \cdot (x+y-10) = 0$$
$$\implies 2 \cdot (x+y-10) \cdot (x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2 + 10 \cdot x + 10 \cdot y + 100) - 3 \cdot x \cdot y \cdot (x+y-10) = 0$$
$$\implies (x+y-10) \cdot (2 \cdot x^2 + x \cdot y + 2 \cdot x \cdot y^2 + 20 \cdot x + 20 \cdot y + 200) = 0$$

Note que $2 \cdot x^2 + x \cdot y + 2 \cdot y^2 + 20 \cdot x + 20 \cdot y + 200 = 2 \cdot [(x+y)^2 + 10 \cdot (x+y) + 100] - 3 \cdot x \cdot y > 0$ pois $2 \cdot [(x+y)^2 + 10 \cdot (x+y) + 100] - 3 \cdot x \cdot y = \dfrac{[x^2 + y^2 + (x+y)^2]}{2} + (x+10)^2 + (y+10)^2$.

Logo $(x+y-10) = 0 \implies x + y = 10$