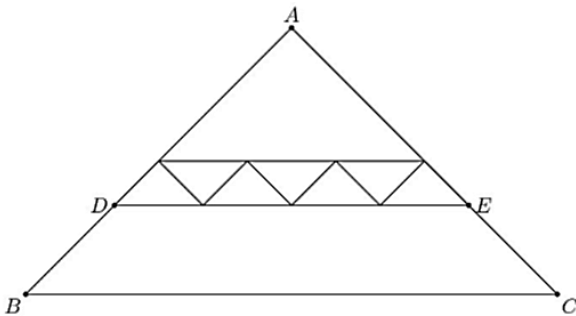


1. (AMC) Todos os triângulos da figura a seguir são semelhantes ao triângulo isósceles ABC , no qual $AB = AC$. Cada um dos 7 triângulos menores tem área 1 e o triângulo ABC tem área 40. Qual é a área do trapézio $DBCE$?



- (A) 16
- (B) 18
- (C) 20
- (D) 22
- (E) 24

2. (OBM) Em um triângulo ABC com $\widehat{ABC} - \widehat{BAC} = 50^\circ$, a bissetriz do ângulo \widehat{ACB} intersecta o lado AB em D . Seja E o ponto do lado AC tal que $\widehat{CDE} = 90^\circ$. A medida do ângulo \widehat{ADE} é

- (A) 25°
- (B) 30°
- (C) 40°
- (D) 45°
- (E) 50°

3. (OBM) Se x, y, a e b são reais positivos tais que $\sqrt{x - y} = a$ e $\sqrt{x} + \sqrt{y} = b$, determine \sqrt{xy} .

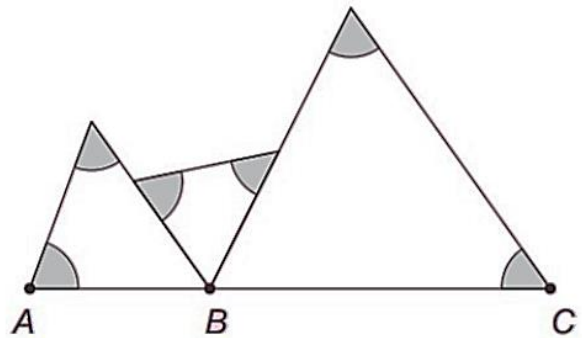
- (A) $\frac{b^4 - a^4}{4b^2}$
- (B) $\frac{a^2}{b}$
- (C) $\frac{b^2 + a^2}{b}$
- (D) $\frac{1}{b}$
- (E) a^2

4. (AMC) O produto $8 \times 888\dots 8$, onde o segundo fator tem k algarismos, é um inteiro cuja soma dos dígitos é 1000. Determine o valor de k .

Dica: observe valores pequenos para o número de dígitos 8 e tente encontrar um padrão

- (A) 901
- (B) 911
- (C) 919
- (D) 991
- (E) 999

5. (OBMEP) Na figura, os pontos A, B e C estão alinhados. Qual é a soma dos ângulos marcados em cinza?



- (A) 120°
- (B) 180°
- (C) 270°
- (D) 360°
- (E) 540°

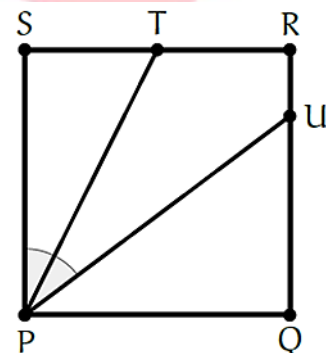
6. Qual a soma de todos os inteiros positivos n tais que

$$\sqrt{n^2 + 85n + 2017}$$

também é inteiro?

- (A) 195
- (B) 190
- (C) 185
- (D) 180
- (E) 175

7. O quadrado $PQRS$ abaixo tem lado medindo 4 cm. Sabendo que T é o ponto médio de RS , $U \in RQ$ e $\widehat{SPT} = \widehat{TPU}$, qual o comprimento de UR ?



- (A) 3,5 cm.
- (B) 3 cm.
- (C) 2 cm.
- (D) 1,5 cm.
- (E) 1 cm.

8. Na multiplicação indicada na figura os asteriscos representam algarismos, iguais ou não. Qual é a soma dos números que foram multiplicados?

$$\begin{array}{r}
 \times \quad * * \\
 \quad * * \\
 \hline
 + \quad * * * \\
 \quad * * \\
 \hline
 1656
 \end{array}$$

- (A) 82
 (B) 95
 (C) 110
 (D) 127
 (E) 132

9. (OBM) Se $x + y = 8$ e $xy = 15$, qual é o valor de $x^2 + 6xy + y^2$?

- (A) 64
 (B) 109
 (C) 120
 (D) 124
 (E) 154

10. (OBM) No triângulo ABC, $AB = 2$ e $BC = \sqrt{2}$. Seja M o ponto médio do lado AB. Se $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{BMC} = \beta$ e $\widehat{MBC} = \gamma$, então:

- (A) $\alpha + \beta = \gamma$
 (B) $\alpha + \beta = 2\gamma$
 (C) $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
 (D) $\alpha + \beta = 90^\circ$
 (E) $\alpha + \beta = 45^\circ$

11. Qual é o algarismo das unidades do número 13^{2018} ?

- (A) 1
 (B) 3
 (C) 7
 (D) 8
 (E) 9

12. Na equação

$$(10^{12} + 2500)^2 - (10^{12} - 2500)^2 = 10^n,$$

qual o valor de n ?

- (A) 10
 (B) 12
 (C) 14
 (D) 16
 (E) 20

13. Qual o valor inteiro de n para o qual o número $2^8 + 2^{11} + 2^n$ é um quadrado perfeito?

- (A) 3.
 (B) 6.
 (C) 7.
 (D) 8.
 (E) 12.

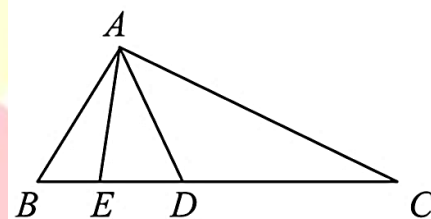
14. (OBMEP) Joãozinho inventou uma operação matemática com números inteiros, para a qual ele usa o sinal *. Ela funciona assim:

$$a * b = (a + 1)x(b - 1)$$

Por exemplo, $3 * 5 = (3 + 1)x(5 - 1) = 16$. Se a e b são inteiros positivos tais que $a * b = 24$ e $b * a = 30$, quanto vale $a + b$?

- (A) 11
 (B) 12
 (C) 15
 (D) 16
 (E) 18

15. No triângulo ABC, os pontos D e E pertencem ao lado BC e são tais que $BD = BA$ e $CE = CA$. Dado que $\widehat{DAE} = 40$, quanto mede, em graus, o ângulo \widehat{BAC} ?



- (A) 80°
 (B) 90°
 (C) 100°
 (D) 110°
 (E) 120°

16. (AMC) No triângulo ABC, $AB = BC = 29$ e $AC = 42$. Qual é a área do triângulo ABC?

- (A) 701
 (B) 609
 (C) 500
 (D) 420
 (E) 100

17. (OBM) Determine $x + y$, onde x e y são reais, sabendo que $x^3 + y^3 = 9$ e $xy^2 + x^2y = 6$.

- (A) 1
 (B) 2
 (C) 3
 (D) 4
 (E) 5

18. (OBM) Para homenagear a Copa do Mundo e as Olimpíadas no Brasil, Esmeralda, a prefeita da cidade Gugulândia, decidiu que seria feriado em sua cidade no dia x do mês de número y , onde x é o último algarismo do número 2016^{2014} e y é o resto de 2014^{2016} na divisão por 11. Assim, esse feriado será no dia:

Observação: O mês de janeiro corresponde ao mês de número 1 e assim por diante.

- (A) 8 de março
- (B) 6 de janeiro
- (C) 4 de janeiro
- (D) 6 de abril
- (E) 6 de março

19. (AMC) Os dois números de 7 algarismos $\overline{74A52B1}$ e $\overline{326AB4C}$ são múltiplos de 3. Qual dos seguintes algarismo é um possível valor de C ?

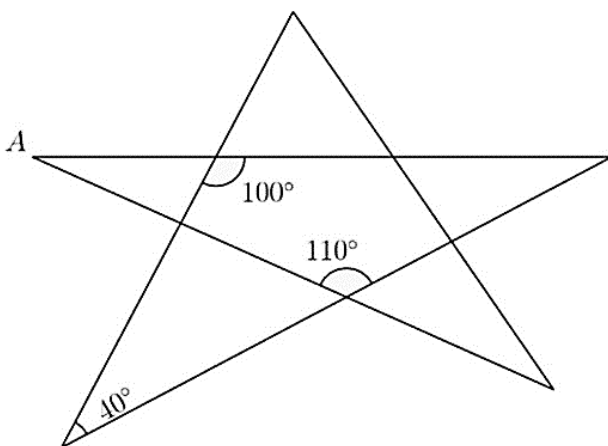
- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 5
- (E) 8

20. (OBM) Determine o valor da expressão

$$\frac{2015^3 - 1}{1 + 2015^2 + 2016^2}$$

- (A) 1006
- (B) 1007
- (C) 1008
- (D) 2014
- (E) 2015

21. (AMC) Determine a medida do ângulo A em graus.



- (A) 20°
- (B) 30°
- (C) 35°
- (D) 40°
- (E) 45°

22. (OBMEP) Adão atribuiu um valor numérico a cada letra do alfabeto. Multiplicando os valores atribuídos às letras, ele obteve $PAPAI = 12$, $GALO = 5$ e $PAPAGAIO = 24$. Qual é o valor que ele atribuiu à letra L ?

- (A) $1/4$
- (B) $5/8$
- (C) $10/3$
- (D) 2
- (E) $5/2$

23. Qual o maior inteiro positivo x tal que o resultado de

$$\frac{4x^2 + 7x + 8}{x + 1}$$

também é inteiro?

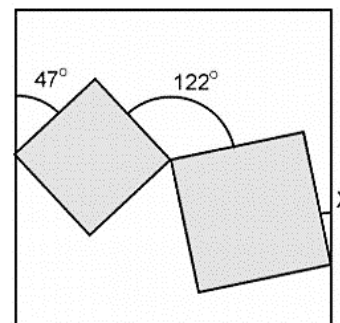
- (A) 8
- (B) 7
- (C) 6
- (D) 5
- (E) 4

24. Sendo $x \in \mathbb{R}^*$ tal que $x + \frac{1}{x} = 4$. Qual o valor de

$$x^3 + x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}?$$

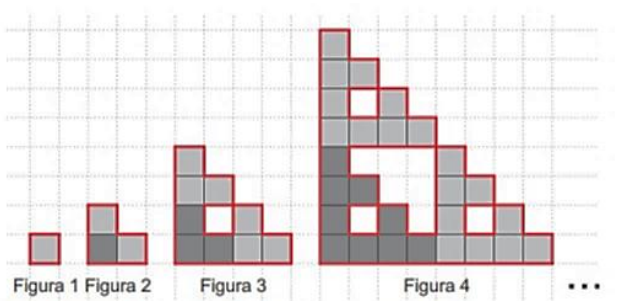
- (A) 32.
- (B) 66.
- (C) 70.
- (D) 80.
- (E) 128.

25. (OBM) Na figura, os quadrados cinzentos têm um vértice comum e o quadrado maior tem um vértice de cada um desses quadrados em seus lados. As medidas de alguns ângulos, em graus, estão indicadas na figura. Qual é o valor de x em graus?



- (A) 79°
- (B) 43°
- (C) 32°
- (D) 21°
- (E) 11°

26. (OBMEP) Começando com um quadrado de 1 cm de lado, formamos uma sequência de figuras, como na ilustração. Cada figura, a partir da segunda, é formada unindo-se três cópias da anterior. Os contornos das quatro primeiras figuras medem, respectivamente, 4 cm, 8 cm, 20 cm e 56 cm. Quanto mede o contorno da Figura 6?

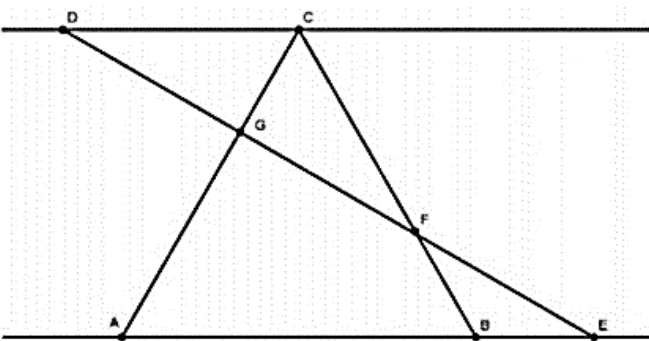


- (A) 88 cm
- (B) 164 cm
- (C) 17 cm
- (D) 48 cm
- (E) 488 cm

27. (OBM) O número de seis dígitos $\overline{ab2016}$ é múltiplo de 99. Determine o valor do dígito a.

- (A) 2
- (B) 3
- (C) 6
- (D) 8
- (E) 9

28. (OBM) Na figura a seguir, as retas CD e AB são paralelas. Se ABC é um triângulo equilátero, $DG = GF = FE$ e $AB = 12$, determine o comprimento de GC.



- (A) 4
- (B) 3
- (C) 8
- (D) 5
- (E) 2

29. O número de seis dígitos $\overline{ab2016}$ é múltiplo de 99. Qual o valor do dígito a?

- (A) 2
- (B) 3
- (C) 6
- (D) 8
- (E) 9

30. (OBM) O perímetro de um retângulo é 100 e a diagonal mede x. Qual é a área do retângulo?

- (A) $625 - x^2$
- (B) $625 - \frac{x^2}{2}$
- (C) $1250 - x^2$
- (D) $1250 - \frac{x^2}{2}$
- (E) $2500 - \frac{x^2}{2}$

31. (OBM) O triângulo aritmético de Fibonacci é formado pelos números ímpares inteiros positivos a partir do 1 dispostos em linhas com ordem crescente em cada linha e pulando para a linha seguinte. A linha n possui exatamente n números. Veja as quatro primeiras linhas

linha 1 → 1
 linha 2 → 3 5
 linha 3 → 7 9 11
 linha 4 → 13 15 17 19
 ...

Em qual linha aparecerá o 2013?

- (A) 46
- (B) 45
- (C) 64
- (D) 63
- (E) 62

32. (OBMEP) Juliana começou a escrever, em ordem crescente, uma lista dos números inteiros positivos cuja soma dos algarismos é divisível por 5. Sua lista começou com 5, 14, 19, 23, e terminou quando ela encontrou dois números consecutivos. Qual é a soma dos algarismos do penúltimo número dessa lista?

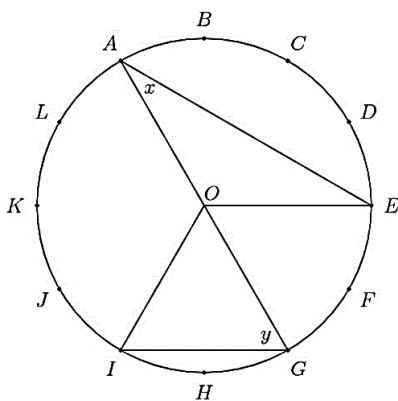
- (A) 10
- (B) 20
- (C) 30
- (D) 40
- (E) 50

33. (OBMEP) Qual é o valor da expressão abaixo?

$$\frac{-1x^2 + 2x^3 - 3x^4 + 4x^5 - 5x^6 + \dots - 49x^{50} + 50x^{51}}{1 + 2 + 3 + \dots + 25}$$

- (A) 4
- (B) 5
- (C) 6
- (D) 7
- (E) 8

34. (AMC) A circunferência de centro O foi dividida em 12 arcos iguais, marcados por letras de A até L como na figura a seguir. Determine a soma dos ângulos x e y em graus.



- (A) 75°
- (B) 80°
- (C) 90°
- (D) 120°
- (E) 150°

35. Qual o maior número primo que divide $2^{24} - 1$ e $2^{16} - 1$?

- (A) 23
- (B) 19
- (C) 17
- (D) 13
- (E) 11

36. (OBMEP) Qual é o algarismo das dezenas da soma

$$\underbrace{7}_{\text{um sete}} + \underbrace{77}_{\text{dois setes}} + \underbrace{777}_{\text{três setes}} + \underbrace{7777}_{\text{quatro setes}} + \dots + \underbrace{777 \dots 777}_{\text{setenta e seis setes}} + \underbrace{777 \dots 777}_{\text{setenta e sete setes}} ?$$

- (A) 5
- (B) 6
- (C) 7
- (D) 8
- (E) 9

37. (OBM) O conjunto verdade de uma equação na variável x é o conjunto formado por todos os valores de x que satisfazem a equação. O conjunto verdade da equação $(x - a)^2 = b^2$, sendo a e b reais positivos, é:

- (A) $\{a + b\}$
- (B) $\{a - b\}$
- (C) $\{a + b; a - b\}$
- (D) $\{-a + b; a + b\}$
- (E) $\{a + b; -a - b\}$

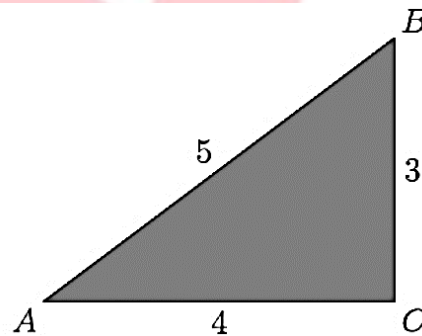
38. A equação

$$37^2 + 46^2 + 49^2 - 20^2 - 17^2 = x^2 + y^2$$

possui apenas uma solução inteira positiva (x, y) , com $x < y$. Sendo assim, qual o valor de $x + y$?

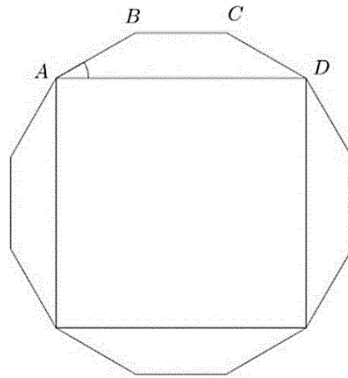
- (A) 76
- (B) 80
- (C) 84
- (D) 93
- (E) 95

39. (AMC) Um papel triangular com lados 3, 4 e 5 cm, como mostrado na figura, é dobrado de modo que o ponto A fique exatamente sobre o ponto B . Qual é o comprimento da dobra feita?

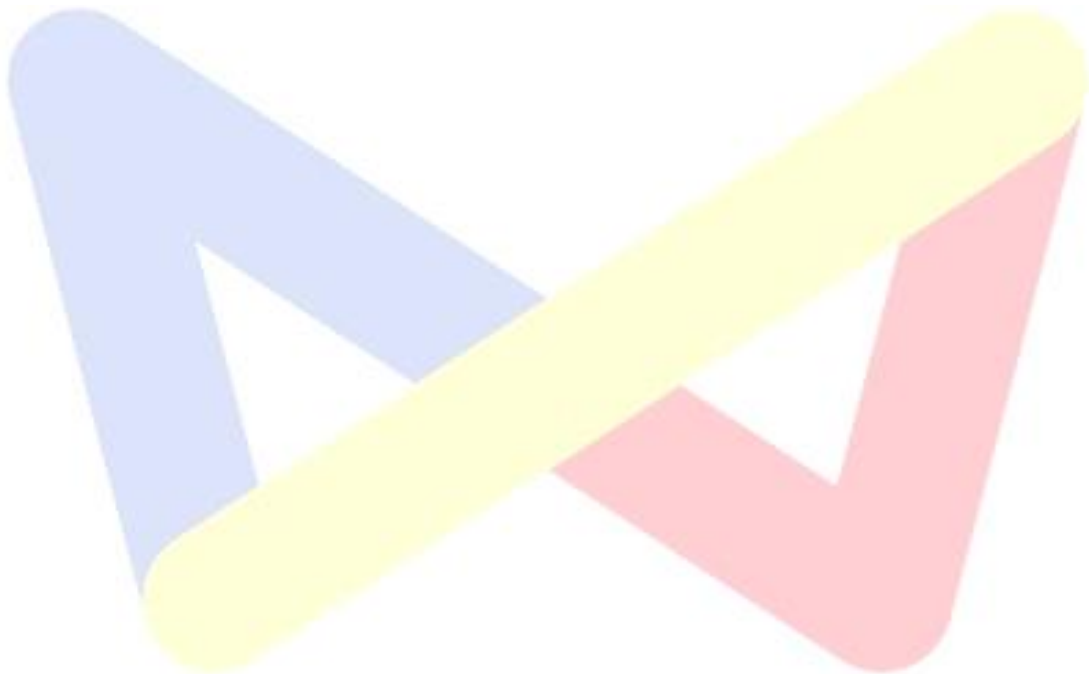


- (A) $1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$
- (B) $\sqrt{3}$
- (C) $\frac{7}{4}$
- (D) $\frac{15}{8}$
- (E) 2

40. (OBM) Sabendo que a figura a seguir representa um dodecágono regular, qual a medida do ângulo $B\hat{A}D$?



- (A) 15°
- (B) 30°
- (C) 45°
- (D) 60°
- (E) 75°



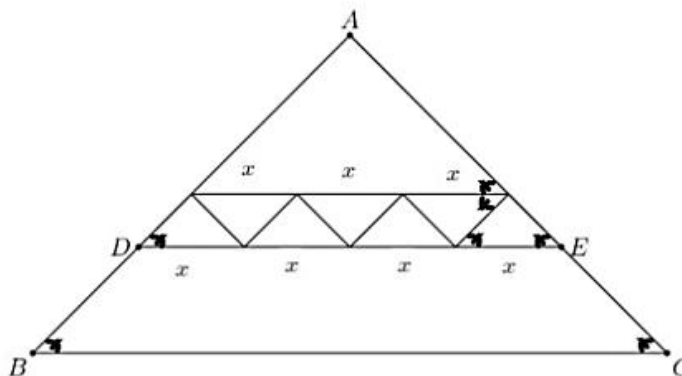
GABARITO

1	A	B	C	D	E	21	A	B	C	D	E
2	A	B	C	D	E	22	A	B	C	D	E
3	A	B	C	D	E	23	A	B	C	D	E
4	A	B	C	D	E	24	A	B	C	D	E
5	A	B	C	D	E	25	A	B	C	D	E
6	A	B	C	D	E	26	A	B	C	D	E
7	A	B	C	D	E	27	A	B	C	D	E
8	A	B	C	D	E	28	A	B	C	D	E
9	A	B	C	D	E	29	A	B	C	D	E
10	A	B	C	D	E	30	A	B	C	D	E
11	A	B	C	D	E	31	A	B	C	D	E
12	A	B	C	D	E	32	A	B	C	D	E
13	A	B	C	D	E	33	A	B	C	D	E
14	A	B	C	D	E	34	A	B	C	D	E
15	A	B	C	D	E	35	A	B	C	D	E
16	A	B	C	D	E	36	A	B	C	D	E
17	A	B	C	D	E	37	A	B	C	D	E
18	A	B	C	D	E	38	A	B	C	D	E
19	A	B	C	D	E	39	A	B	C	D	E
20	A	B	C	D	E	40	A	B	C	D	E

1. ALTERNATIVA E

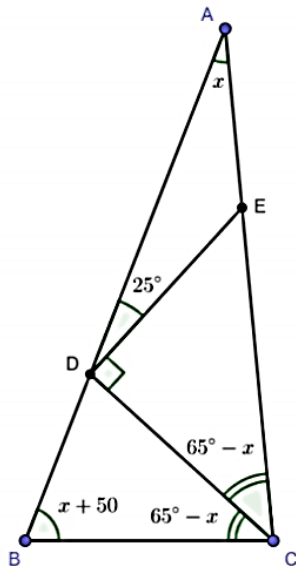
Seja x com comprimento da base de cada um dos triângulos menores de área 1. Veja que o triângulo ADE também será semelhante ao ABC, pois tem os ângulos da base iguais, e tem base $4x$. Portanto, a área do ADE é $4^2 = 16$ vezes a área do triângulo menor que é 16. Daí a área do DBCE é dada por

$$[DBCE] = [ABC] - [ADE] = 40 - 16 = 24$$



OBS: podemos também encontrar a área do triângulo formado por A até os triângulos menores de duas formas : base $3x$ implicando área $3^2 \cdot 1 = 9$ ou $16 - 7 \cdot 1 = 9$

2. ALTERNATIVA A



Seja $\angle BAC = x$. Pela equação $\angle ABC - \angle BAC = 50^\circ$, temos $\angle ABC = x + 50^\circ$. Somando os ângulos internos do triângulo ABC, temos $\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = 130 - 2x$.

Segundo CD bissetriz, temos $\angle DCB = \angle DCA = 65^\circ - x$. Pela soma dos ângulos internos do triângulo ADC, temos $\angle ADC = 180^\circ - \angle DAC - \angle DCA = 115^\circ$. Finalmente, temos $\angle ADE = \angle ADC - \angle EDC = 115^\circ - 90^\circ = 25^\circ$.

3. ALTERNATIVA A

Note que $a^2 = x - y = (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y}) \rightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = \frac{a^2}{b}$. Adicionando $(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = b$ e $(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = \frac{a^2}{b}$, temos $2\sqrt{x} = b + \frac{a^2}{b}$ e subtraindo $2\sqrt{y} = b - \frac{a^2}{b}$. Fazendo o produto das duas últimas equações temos $4\sqrt{xy} = \left(b + \frac{a^2}{b}\right) \cdot \left(b - \frac{a^2}{b}\right) \rightarrow \sqrt{xy} = \frac{b^4 - a^4}{4b^2}$

4. ALTERNATIVA D

Primeiro faremos casos pequenos para entender o padrão

$$8 \cdot 8 = 64 ; 8 \cdot 88 = 704 ; 8 \cdot 888 = 7104 ; 8 \cdot 8888 = 71104$$

Para $k = 1, 2, 3$ e 4 temos uma soma dos dígitos $10, 11, 12$ e 13 , respectivamente. Então nosso palpite é que para cada k a soma dos dígitos é $k + 9$. Se provaros isso, a soma é 1000 para $k + 9 = 1000 \rightarrow k = 991$.

Mais exatamente, o resultado é da forma $7111 \dots 104$ com $k - 2$ algarismos uns em sequência.

Podemos provar por indução

$$8 \cdot 888 \dots 8 = 8 \cdot 800 \dots 0 + 8 \cdot 888 \dots 8 = 64000 \dots 0 + 7111 \dots 104$$

A primeira parcela tem $k - 1$ zeros e a segunda parcela $k - 1 - 2 = k - 3$ uns. Assim, os dígitos mais significativos são $64 + 7 = 71$ deslocando 7 e adicionando 1 no bloco de algarismos 1.

O bloco novo tem $k - 3 + 1 = k - 2$ algarismos 1.

A soma dos algarismos é $7 + (k - 2)1 + 0 + 4 = k + 9$ como havíamos adiantado.

5. ALTERNATIVA D

Veja que a soma dos ângulos dos três triângulos juntos é $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$. Porém, foram apagados os ângulos em torno do ponto B e formam o ângulo $\angle ABC$. Como A, B e C estão alinhados $\angle ABC = 180^\circ$. Assim, a soma dos ângulos em cinza é $540^\circ - 180^\circ = 360^\circ$.

6. ALTERNATIVA A

Sendo $q \in \mathbb{N}$, podemos desenvolver para completar quadrados e depois fazer a diferença de quadrados chegando a

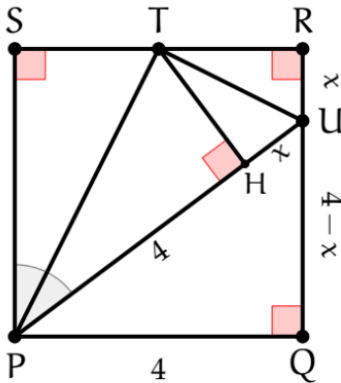
$$\begin{aligned} n^2 + 85n + 2017 &= q^2 \\ (2n + 85)^2 + 4 \cdot 2017 - 85^2 & \\ (2q + (2n + 85)) \cdot (2q - (2n + 85)) &= 843 \end{aligned}$$

que pode ser escrito como $843 = 1 \cdot 843 = 3 \cdot 281$. Sendo assim, ficamos com

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2q + (2n + 85) = 843 \\ 2q - (2n + 85) = 1 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} 2q + (2n + 85) = 281 \\ 2q - (2n + 85) = 3 \end{cases} \rightarrow \\ \begin{cases} 2q + (2n + 85) = 3 \\ 2q - (2n + 85) = 281 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} 2q + (2n + 85) = 1 \\ 2q - (2n + 85) = 843 \end{cases} \end{aligned}$$

As diferenças entre as equações nos dois primeiros sistemas geram $2(2n + 85) = 842$ e $2(2n + 85) = 278$, como $n \in \{168, 27\}$ e $168 + 27 = 195$, para os dois últimos sistemas teremos $n \notin \mathbb{Z}_+^*$.

7. ALTERNATIVA E



De início, defina $RU = x$ e conclua $UQ = 4 - x$. Depois, destaque o ΔTPU e trace a sua altura TH . Daí, perceba que ΔPST é congruente a ΔPHT , pelo caso *AAA* e hipotenusa comum, concluindo $PS = PH = 4 \text{ cm}$. Analogamente, $\Delta URT \cong \Delta UHT$ e $RU = UH = x$. Aplicando o teorema de pitágoras no ΔPQU chegamos a

$$4^2 + (4 - x)^2 = (4 + x)^2 \rightarrow x = 1 \text{ cm}$$

8. ALTERNATIVA C

Vejamos as possibilidades para que o produto de dois números de dois algarismos seja $1656 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 23$. O fator 23 nos ajuda a limitar as possibilidades, pois $23 \cdot 5 = 115$ que já teria mais que 2 algarismos. Então 23 só nossos casos são 23×72 , 46×36 , 69×24 e 92×18 .

Observe que na operação ao multiplicar o algarismo das dezenas do número de baixo pelo número de cima resulta em um número de dois algarismos. Isso só é possível usando 18 em baixo e 92 em cima. Então a soma dos números multiplicados é $18 + 92 = 110$.

9. ALTERNATIVA D

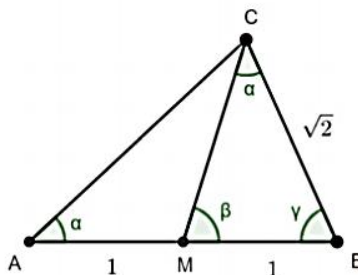
Separando as partes que formam $(x + y)^2$, temos $x^2 + 6xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 + 4xy = (x + y)^2 + 4xy = 8^2 + 4 \cdot 15 = 124$

10. ALTERNATIVA C

Como M é o ponto médio de AB , temos $MA = MB = 1$. Os triângulos MBC e CBA são semelhantes por *LAL*, já que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{MB}{CB} = \frac{BC}{BA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e $\angle MBC = \angle CBA = \beta$. Com isso, $\angle BCM = \angle BAC = \alpha$.



Pela soma dos ângulos triângulos ABC temos $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

11. ALTERNATIVA E

Veja que o algarismo das unidades é o resto da divisão por 10. Pelo teorema dos Restos, o algarismo das unidades de 13^{2018} é igual ao algarismo das unidades de 3^{2018} . Veja que $3^4 = 81$ deixa resto 1 por 10 e, conseqüentemente, $3^{2016} = (3^4)^{504}$ deixa o mesmo resto que $1^{504} = 1$ por 10. Logo, 3^{2018} edixa o mesmo resto por 10 que $3^{2016} = 3^{2016} \cdot 3^2$ que deixa resto $1 \cdot 9 = 9$.

12. ALTERNATIVA D

$$\begin{aligned}(10^{12} + 2500)^2 - (10^{12} - 2500)^2 &= 10^n \rightarrow \\ 10^{24} + 2 \cdot 10^{12} \cdot 2500 + 2500^2 - 10^{24} + 2 \cdot 10^{12} \cdot 2500 - 2500^2 &= 10^n \rightarrow \\ 4 \cdot 10^{12} \cdot 2500 &= 10^n \rightarrow \\ 10^n &= 10^{16} \rightarrow n = 16\end{aligned}$$

13. ALTERNATIVA E

Veja que

$$2^8 + 2^{11} + 2^n = (2^4)^2 + 2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 + 2^n = (2^4)^2 + 2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 + (2^{\frac{n}{2}})^2$$

Se $\frac{n}{2} = 6 \rightarrow n = 12$, temos

$$(2^4)^2 + 2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 + (2^6)^2 = (2^4 + 2^6)^2$$

Que é um quadrado perfeito.

14. ALTERNATIVA A

Veja que

$$\begin{aligned}a * b &= (a + 1) \cdot (b - 1) = ab - a + b + 1 = 24 \\ b * a &= (b + 1) \cdot (a - 1) = ba - b + a + 1 = 30\end{aligned}$$

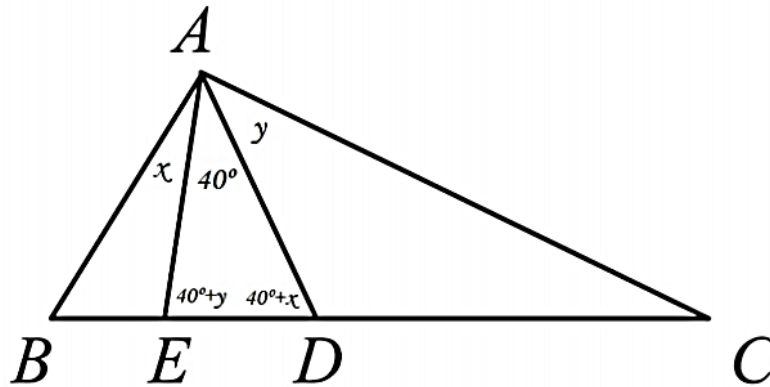
E somando as expressões $2(ab - 1) = 27 \rightarrow ab = 28$. Com esse valor na segunda equação $28 - b + a - 1 = 30 \rightarrow a = b + 3$. Logo $b(b + 3) = 28 \rightarrow b^2 + 3b - 28 = 0$.

Resolvendo a equação do segundo grau temos $b = 4$ ou $b = -7$. Como são inteiros positivos temos $(a, b) = (7, 4)$ e a soma deles é 11.

OBS : Também poderíamos testar os valores de a e b cujo produto é 28 na suas equações fornecidas no enunciado.

15. ALTERNATIVA C

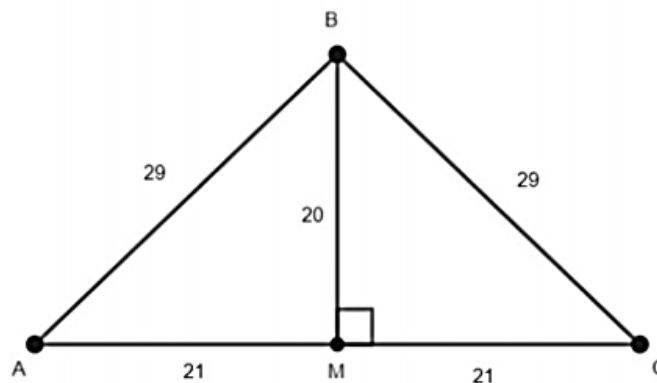
Sejam $\angle BAE = x$ e $\angle CAD = y$. De $BD = BA$, temos $\triangle ABD$ isósceles e $\angle BDA = \angle BAD = 40^\circ + x$. Analogamente, de $CE = CA$ temos que $\triangle ACE$ isósceles e $\angle CEA = \angle CAE = 40^\circ + y$. Considere a figura a seguir



Somando os ângulos internos do triângulo DAE , temos $40 + x + 40 + y = 180 \rightarrow x + y = 60$. Assim, $\angle BAC = x + 40 + y = 100^\circ$

16. ALTERNATIVA D

Trace a altura do triângulo relativa ao vértice B . Como o triângulo é isósceles, $AB = BC$, então ela coincide com a mediana.



Usando o teorema de Pitágoras, temos $BM^2 + MC^2 = AC^2 \rightarrow BM^2 = 29^2 - 21^2 = (29 + 21)(29 - 21) = 50 \cdot 8 \rightarrow BM = 20$. A área do triângulo é

$$[ABC] = \frac{AC \cdot BM}{2} = \frac{42 \cdot 20}{2} = 420$$

17. ALTERNATIVA C

Veja que $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy^2 + 3x^2y = 9 + 3 \cdot 6 = 27$. Podemos concluir que $x + y = \sqrt[3]{27} = 3$. Veja ainda que $x^2y + xy^2 = xy(x + y)$, implicando em $xy = 2$ e sabendo a soma e o produto dos números, podemos usar a equação do segundo grau $x^2 - 3x + 2 = 0$ para concluir que $x = 1$ e $y = 2$ ou $x = 2$ e $y = 1$.

18. ALTERNATIVA B

Para descobrir x fazemos 2016^{2014} módulo 10 e temos

$$2016^{2014} \equiv 6^{2014} \pmod{10}$$

Veja que $6^1 \equiv 6 \pmod{10}$, $6^2 \equiv 6 \pmod{10}$, $6^3 \equiv 6 \pmod{10}$. Prova-se por indução que $6^n \equiv 6 \pmod{10}$ para todo n inteiro positivo. Concluimos que $x = 6$.

Para descobrir y podemos usar a mesma ideia módulo 11.

$$2014^{2016} \equiv 1^{2016} \equiv 1 \pmod{11}$$

Concluimos que $y = 1$.

Portanto o dia é 6 de janeiro.

19. ALTERNATIVA A

Pelo critério de divisibilidade por 3 no primeiro número, temos que $3|7 + 4 + A + 5 + 2 + B + 1 = 19 + A + B$ e $A + B$ deve deixar resto 2 na divisão por 3. Usando no segundo número $3|3 + 2 + 6 + A + B + 4 + C = 15 + A + B + C$ e $A + B + C$ deve deixar resto 0 na divisão por 3. Das duas informações, concluimos que C deixa resto 1 por 3 e o único número entre os números nos itens com essa propriedade é 1 no item A.

20. ALTERNATIVA B

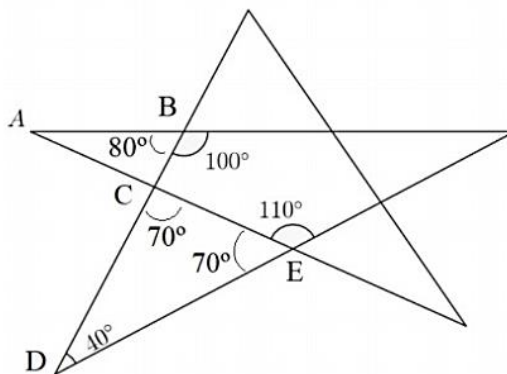
Usando produtos notáveis, sabemos que $2015^3 - 1 = (2015 + 1)(2015^2 + 2015 - 1)$ e que $2016^2 = (2015 + 1)^2 = 2015^2 + 2 \cdot 2015 + 1$. Logo, a expressão pode ser desenvolvida

$$\frac{2015^3 - 1^3}{1^2 + 2015^2 + 2016^2} = \frac{(2015 - 1) \cdot (2015^2 + 2015 + 1)}{1 + 2015^2 + 2015^2 + 2 \cdot 2015 + 1} = \frac{(2014) \cdot (2015^2 + 2015 + 1)}{2(2015^2 + 2015 + 1)} = \frac{2014}{2}$$

Portanto, a resposta é 1007.

21. ALTERNATIVA B

Veja a figura a seguir



Temos dois ângulos sobre reta no ponto E , um é 110° e o outro $180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$. Da mesma forma, no ponto B temos um ângulo 100° e o outro $180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$. Somando os ângulos internos do triângulo CDE , encontramos $\angle C = 180^\circ - 40^\circ - 70^\circ = 70^\circ$. Para determinar o ângulo A podemos usar a soma dos ângulos internos do triângulo ABC : $\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C = 180^\circ - 80^\circ - 70^\circ = 30^\circ$.

22. ALTERNATIVA E

Multiplicando as duas primeiras expressões e dividindo o resultado pela terceira, temos

$$\frac{PAPAI \times GALO}{PAPAGAI} = \frac{12.5}{24} \rightarrow L = \frac{5}{2}$$

23. ALTERNATIVA E

Procedendo a divisão de polinômios, teremos que

$$(4x^2 + 7x + 8) \div (x + 1) = 4x + 3 + \frac{5}{x + 1}$$

Para termos $\frac{5}{x+1} \in \mathbb{Z}_+^*$, precisamos que $x + 1$ seja fator de 5, o que gera o maior x como 4.

24. ALTERNATIVA B

Note que

$$x + \frac{1}{x} = 4$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 - 2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 16 - 2 = 14$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x - 3x + \frac{3}{x} - \frac{3}{x} = \left(x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x + \frac{3}{x}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 64 - 3 \cdot 4 = 52$$

Portanto

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + x^3 + \frac{1}{x^3} = 14 + 52 = 66$$

25. ALTERNATIVA E

Usando o teorema dos Bicos, temos $47^\circ + 122^\circ + x = 90^\circ + 90^\circ \rightarrow x = 11^\circ$.

26. ALTERNATIVA E

Seja a_n o contorno da figura n . Por exemplo, $a_1 = 4$, $a_2 = 8$ e assim por diante. Observe que de uma figura n para a seguinte de número $n + 1$ fazemos 3 cópias da figura n e perdemos 4 unidades, pois fazemos duas conexões entre as figuras, cada conexão perde uma unidade de cada figura. Portanto,

$$a_{n+1} = 3a_n - 4$$

Assim,

$$a_3 = 3 \cdot 8 - 4 = 20; a_4 = 3 \cdot 20 - 4 = 56; a_5 = 3 \cdot 56 - 4 = 164; a_6 = 3 \cdot 164 - 4 = 488$$

OBS: podemos manipular a recorrência para $a_{n+1} - 2 = 3a_n - 6 = 3(a_n - 2)$ e $a_n - 2$ é uma PG. Assim, $a_n - 2 = 3^{n-1}(a_1 - 2) \rightarrow a_n = 3^{n-1}(4 - 2) + 2 = 2 \cdot 3^{n-1} + 2$ que é a fórmula geral dessa sequência.

27. ALTERNATIVA C

1ª Resolução:

Veja que 100 deixa resto 1 por 99 e, portanto, $ab \cdot 100^2 + 20 \cdot 100 + 16$ deixa o mesmo resto que $ab + 20 + 16 = ab + 36$. Como esse resultado é múltiplo de 99, temos que ab deixa resto $99 - 36 = 63$ na divisão por 99. O único número de 2 algarismos com esse resto por 99 é o próprio 63. Logo, $a = 6$ e $b = 3$.

2ª Resolução:

De início, perceba que $0 < a \leq 9$; $0 \leq b \leq 9$; e, pelos critérios de divisibilidade por 11 e por 9, devemos ter

$$\begin{cases} 11|(a + 2 + 1) - (b + 0 + 6) = a - b - 3 \\ 9|a + b + 2 + 0 + 1 + 6 = a + b + 9 \end{cases}$$

Como $a + b \leq 18$, as únicas possibilidades que satisfazem a última relação de divisibilidade são :

I) $a + b = 9$, gerando

$$\begin{aligned} 11|a - b - 3 \\ 11|(9 - b) - b - 3 \\ 11|6 - 2b = 2(3 - b) \end{aligned}$$

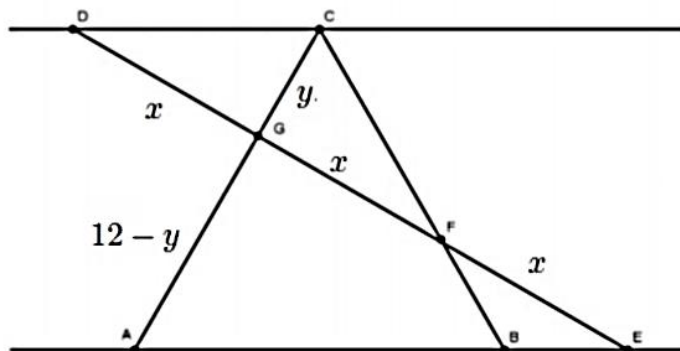
Cujo único dígito que resolve essa relação é $b = 3$, resultando em $a = 6$; e

II) $a + b = 18$, o que resulta em $a = b = 9$ e $11|9 - 9 - 3 = -3$ (um absurdo)

A única solução possível é $a = 6$ e $b = 3$.

28. ALTERNATIVA A

Sejam $DG = GF = FE = x$ e $GC = y$. Como ABC é equilátero temos $AC = AB = 12$ e $AG = AC - GC = 12 - y$.



Como os segmentos CD e AB são paralelos os triângulos DCG e EAG possuem todos os ângulos iguais e são semelhantes. Daí

$$\frac{CG}{AG} = \frac{GD}{GE} \rightarrow \frac{y}{12 - y} = \frac{x}{2x} \rightarrow y = 4$$

29. ALTERNATIVA B

$$\begin{aligned} \overline{ab2016} &= \overline{ab} + 2016 = 99k \\ &= 99k + 2016 \\ \overline{ab} &= 99(k + 20) + 36 \\ \overline{ab} - 36 &= 99(k + 20) \end{aligned}$$

O único número de 2 algarismos dividido por 99 deixa resto 36 é o próprio 36, logo

$$\overline{ab} = 36 \Rightarrow a = 3 \text{ e } b = 6$$

30. ALTERNATIVA D

Sejam a e b a altura e a base desse retângulo. Do perímetro temos $100 = 2a + 2b \rightarrow a + b = 50$ e da diagonal temos $a^2 + b^2 = x^2$. Desejamos calcular a área ab , mas usando essas equações e produtos notáveis

$$ab = \frac{(a + b)^2 - (a^2 + b^2)}{2} = \frac{50^2 - x^2}{2} = 1250 - \frac{x^2}{2}$$

31. ALTERNATIVA B

Como a linha k tem k ímpares o último número dessa linha é o ímpar de posição $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. Olhando para a linha anterior o último número é o ímpar de posição $1 + 2 + \dots + k - 1 = \frac{k(k-1)}{2}$. Como 2013 é o ímpar de posição 1007, pois $2013 = 2 \cdot 1007 - 1$, queremos encontrar k tal que

$$\frac{k(k-1)}{2} < 1007 \leq \frac{k(k+1)}{2}$$

Veja o produto $k(k+1)$ deve ser maior ou igual a $2 \cdot 1007 = 2014$ e é aproximadamente k^2 . Como $k^2 > 2014 \rightarrow k \geq 45$, pois $45^2 = 2025$ e $44^2 = 1936$. Testando $k = 45$ temos

$$\frac{44 \cdot 45}{2} = 990 < 1007 \leq 1035 = \frac{45 \cdot 46}{2}$$

Portanto, 2013 está na linha 45.

32. ALTERNATIVA D

A soma dos dígitos aumenta 1 quando o dígito das unidades é menor que 9. Quando o dígito das unidades é 9 a soma aumenta 1, mas subtrai 9 para cada vai um que for feito para as casas das esquerda. Por exemplo, a soma dos dígitos de 399 é $3 + 9 + 9 = 21$ e a soma dos dígitos de 400 é $3 + 9 + 9 + 1 - 9 - 9 = 4$, pois existe dois vai um.

No nosso problema, precisamos que a soma dos dígitos dos números consecutivos seja múltiplo de 5, então $1 - 9x$ deve ser múltiplo de 5 onde x é a quantidade de vai um. O menor x que satisfaz essa divisibilidade é $x = 4$. Veja que $1 - 9 \cdot 4 = -35$. O menor número com soma dos dígitos divisível por 5 que termina em 4 noventa e nove é 49999. Logo, a lista de Juliana terminou em 49999 e 50000. A soma dos dígitos do penúltimo número é $4 + 9 + 9 + 9 + 9 = 40$.

33. ALTERNATIVA A

Podemos manipular cada par de parcelas para obter $-(2k-1)x2k + 2k(2k+1) = 2k(-(2k-1) + (2k+1)) = 4k$. Por exemplo, $-1x2 + 2x3 = 2(-1+3) = 4 = 4 \cdot 1$ e $-3x4 + 4x5 = 4(-3+5) = 4 \cdot 2$. Assim,

$$\frac{-1x2 + 2x3 - \dots + 50x51}{1 + 2 + \dots + 25} = \frac{4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + \dots + 4 \cdot 25}{1 + 2 + \dots + 25} = 4$$

34. ALTERNATIVA C

Note que $OA = OE = OG = OI$. Os dois triângulos isósceles e os ângulos das bases são iguais. A volta completa de 360° foi dividida igualmente em 12 partes, logo cada parte mede 30° . Pelas quantidades de partes podemos concluir que $\angle AOE = 4 \cdot 30^\circ = 120^\circ$ e $\angle GOI = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$.

Somando os ângulos do triângulo AOE , temos $2x + 120 = 180^\circ \rightarrow x = 30^\circ$ e somando os ângulos do GOI , temos $2y + 60 = 180 \rightarrow y = 60^\circ$. Portanto, $x + y = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$.

35. ALTERNATIVA C

Pela diferença de cubos, temos que

$$2^{24} - 1 = (2^8 - 1)(2^{16} + 2^8 + 1)$$

e pela diferença de quadrados, chegamos a

$$2^{16} - 1 = (2^8 - 1)(2^8 + 1)$$

Observe que $\text{mdc}(2^{16} + 2^8 + 1, 2^8 + 1) = 1$, então o maior número primo que divide ambos é fator de 255, que é 17.

36. ALTERNATIVA A

Seja S a soma dada. Para descobrir o algarismo das dezenas de S basta usarmos módulo 100. Temos

$$S \equiv 7 + 77 + \dots + 77 \equiv 7 + 77 \cdot 76 \equiv 5859 \equiv 59 \pmod{100}$$

Portanto, S termina em 59 e possui algarismo das dezenas igual a 5.

37. ALTERNATIVA C

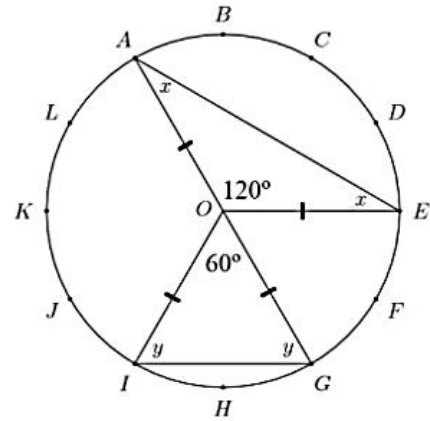
Veja que $(x - a)^2 = b^2 \rightarrow (x - a)^2 - b^2 = 0 \rightarrow (x - a - b)(x - a + b) = 0$. O produto é zero quando um dos fatores é zero. Portanto, $x - a - b = 0 \rightarrow x = a + b$ ou $x - a + b = 0 \rightarrow x = a - b$. O conjunto verdade é $\{a + b, a - b\}$.

38. ALTERNATIVA E

Podemos reescrever o primeiro membro como

$$\begin{aligned} & 49^2 - 20^2 + 46^2 - 17^2 + 37^2 = \\ & (49 - 20)(49 + 20) + (46 - 17)(46 + 17) + 37^2 = \\ & 29 \cdot (132) + 37^2 = \\ & 2 \cdot 29 \cdot 66 + (66 - 29)^2 = \\ & = 29^2 + 66^2 \end{aligned}$$

O que permite concluir que $x = 29$ e $y = 66$, gerando $x + y = 29 + 66 = 95$.

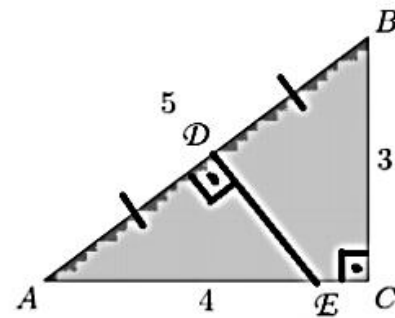


39. ALTERNATIVA D

Como $3^2 + 4^2 = 5^2$ sabemos que $\angle ACB = 90^\circ$ pelo teorema de Pitágoras. Veja que $\angle ADE = 90^\circ$ e a dobra DE divide AB no meio, pois o segmento AD tem que sobrepor exatamente DB implicando $AD = DB = \frac{5}{2}$ e $\angle ADE = \angle BDE = \frac{180}{2}$.

Veja que os triângulos ADE e ACB são semelhantes, ângulos $\angle DAE = \angle CAB = \angle A$ e $\angle ADE = \angle ACB = 90^\circ$. Logo

$$\frac{DE}{CB} = \frac{AD}{AC} \rightarrow \frac{DE}{3} = \frac{\frac{5}{2}}{4} \rightarrow DE = \frac{15}{8}$$



40. ALTERNATIVA B

Seja $\angle BAD = x$. Veja que $\angle CDA = x$, por simetria. O ângulo interno do dodecágono é $\frac{(12-2)180^\circ}{12} = \frac{10 \cdot 180^\circ}{12} = 150^\circ$. Assim, $\angle ABC = \angle BCD = 150^\circ$. Pela soma dos ângulos internos do quadrilátero $ABCD$, temos

$$2x + 2 \cdot 150^\circ = 360^\circ \rightarrow x = 30^\circ$$