Centro Educacional MADAN
Prova de Bolsão - ITA

Instruções para a realização da Prova de Bolsão da Turma ITA do Centro Educacional MADAN.

1. Esta prova de admissão tem duração total de 2h.

2. É permitido o uso **apenas** de lápis (ou lapiseira), caneta e borracha. **É proibido qualquer outro material escolar.**

3. A Prova de Bolsão é composta por **30 questões de múltipla escolha** (numeradas de 01 a 30), sendo todas de **Matemática**.

4. Verifique se este caderno de questões está completo.

5. Cada questão admite **uma única** resposta.

6. Antes do final da prova, você receberá uma folha de gabarito para a transcrição das respostas. Usando **caneta azul ou preta**, assinale a opção correspondente à resposta de cada uma das questões de múltipla escolha. **Não esqueça de colocar seu nome, e-mail e telefone na folha de gabarito.**

7. Cuidado para não errar no preenchimento da folha de gabarito. Se isso correr, avise o fiscal, que lhe fornecerá uma folha extra, com o cabeçalho devidamente preenchido.

8. **Não haverá tempo suplementar para o preenchimento da folha de gabarito**.

9. A **não devolução** da folha de gabarito e do caderno de questões implicará na **desclassificação do candidato**.

10. **Os alunos não estão autorizados a levar o caderno de questões.**

11. **Aguarde o aviso para iniciar a prova. Ao terminá-la, avise o fiscal e aguarde-o no seu lugar**.

12. Até o dia 30/11/2022, o gabarito desta prova será disponibilizado no site do MADAN (www.madan.com.br).

13. Até o dia 30/11/2022, será disponibilizada, no site do MADAN (www.madan.com.br), a classificação com os respectivos percentuais de desconto.

Questão 1

Se a, b e d são comprimentos de um lado, a menor diagonal e da segunda maior diagonal, respectivamente, de um eneágono regular, então:

a) $d = a + b$
b) $d^2 = a^2 + b^2$
c) $d^2 = a^2 + ab + b^2$
d) $b = \frac{a+d}{2}$
e) $b^2 = ad$

Questão 2

Se $a_1, a_2, a_3, \ldots$ é uma sequência de números positivos tais que $a_{n+2} = a_n . a_{n+1}$ para todo inteiro positivo n, então a sequência (a_n) é uma progressão geométrica

a) Para todos os valores positivos a_1 e a_2
b) Se, e somente se, $a_1 = a_2$
c) Se, e somente se, $a_1 = 1$
d) Se, e somente se, $a_2 = 1$
e) Se, e somente se, $a_1 = a_2 = 1$

Questão 3

Qual o produto de todos os inteiros positivos ímpares menores que 10000?

a) $\frac{10000!}{(5000!)^2}$
b) $\frac{10000!}{2^{5000}}$
c) $\frac{9999!}{2^{5000}}$
d) $\frac{10000!}{2^{5000}.5000!}$
e) $\frac{5000!}{2^{5000}}$

Questão 4

Quatro inteiros positivos a, b, c e d tem o produto igual a 8! e satisfazem

$$ab + a + b = 524$$
$$bc + b + c = 146$$
$$cd + c + d = 104$$

Qual o valor de $a - d$?

a) 4
b) 6
c) 8
d) 10
e) 12

Questão 5

Dois números inteiros positivos m e n, com $m > n$ que podem ser expressados na forma abaixo

$$a_0 + 7a_1 + 49a_2 + 343a_3$$

Onde a_i é um elemento do conjunto $A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ para $i = 0,1,2,3$ e $a_3 \neq 0$. Encontre o número de valores diferentes de m tais que $m + n = 2010$.

a) 1005
b) 1029
c) 668
d) 662
e) 343

Questão 6

Em uma família, o número de irmãs de cada filha é igual à metade do número de irmãos. Cada filho tem o mesmo número de irmãos e irmãs. O número total de filhos e filhas é:

a) 4
b) 5
c) 7
d) 10
e) 15

Questão 7

Qual o valor de $\sqrt[13]{21982145917308330487013369}$?

a) 87
b) 89
c) 91
d) 93
e) 95

Questão 8

Sejam a, b e c números reais tais que $\frac{ab}{a+b} = \frac{1}{3}, \frac{bc}{b+c} = \frac{1}{4}$ e $\frac{ac}{a+c} = \frac{1}{5}$. Encontre o valor de $\frac{24abc}{ab+bc+ca}$.

a) 4
b) 3
c) 2
d) 1
e) 0

Questão 9

Sejam x e y números reais satisfazendo a desigualdade $5x^2 + y^2 - 4xy + 24 \leq 10x - 1$. Qual o valor de $x^2 + y^2$?

a) 5
b) 25
c) 125
d) 625
e) 3125

Questão 10

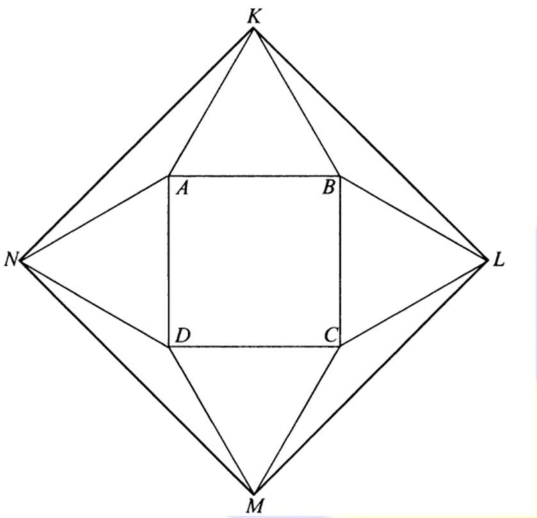
Quantas triplas ordenadas (x, y, z) de inteiros satisfazem a inequação

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 < xy + 3y + 2z:$$

a) 1
b) 2
c) 3
d) 5
e) 8

Questão 11

Os pontos K, L, M e N pertencem ao plano do quadrado $ABCD$, tal que AKB, BLC, CMD e DNA são triângulos equiláteros. A área de $ABCD$ é 16. Qual é a área de $KLMN$?



a) 32
b) $16 + 16\sqrt{3}$
c) 48
d) $32 + 16\sqrt{3}$
e) 64

Questão 12

Qual o valor de:

$$\underbrace{222 \ldots 222}_{n\ 2's} + (\underbrace{333 \ldots 333}_{n\ 3's})^2$$

a) $3 \times (\underbrace{222 \ldots 222}_{n\ 2's})^2 - 1$
b) $4 \times \underbrace{333 \ldots 333}_{n\ 3's} - 1$
c) $(\underbrace{111 \ldots 111}_{n\ 1's})^2$
d) $\underbrace{111 \ldots 111}_{n+1\ 1's}$
e) $\underbrace{111 \ldots 111}_{2n\ 1's}$

Questão 13

Considerando que exista a operação $\otimes$ entre pares ordenados que satisfaçam as seguintes propriedade:

$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Calcule o valor de $\underbrace{(1,1) \otimes (1,1) \otimes \ldots \otimes (1,1)}_{20\ pares\ ordenados}$

a) $(0,20)$
b) $(512,0)$
c) $(0,1024)$
d) $(0, -512)$
e) $(-1024,0)$

Questão 14

Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 1$, calcule o valor de $\frac{(5x+3)^2}{x^{10}}$:

a) 0
b) 1
c) -1
d) 2
e) -2

Questão 15

Um atleta iniciou seu treinamento visando as competições de fim de ano. Seu treinamento consiste em cinco tipos diferentes de treinos: treino T_1, treino T_2, treino T_3, treino T_4 e treino T_5. A sequência de dos treinamentos deve seguir esta ordem:

Dia	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º	13º
Treino	T_1	R	R	T_2	R	R	T_3	R	T_4	R	R	T_5	R

A letra R significa repouso. Após completar a sequência de treinamentos, o atleta começa novamente a sequência a partir do treino T_1 e segue a ordem descrita. Após 22 semanas completas de treinamento, se dará o início das competições. A sequência de treinamentos que o atleta realizará na 22ª semana de treinos é:

a) $T_3RT_4RRT_5R$
b) $T_2RRT_3RT_4R$
c) $RT_4RRT_5RT_1$
d) RRT_3RT_4RR
e) $RT_5RT_1RRT_2$

Questão 16

Uma sequência de quatro termos é obtida adicionando cada termo de um progressão aritmética de inteiros positivos ao termo correspondente de uma progressão geométrica de inteiros positivos. Os três primeiros termos dessa sequência gerada são $57, 60$ e 91. Qual é o quarto termo desta sequência?

a) 190
b) 194
c) 198
d) 202
e) 206

Questão 17

Defina L_n como o mínimo múltiplo comum de todos os inteiros positivos de 1 a n, inclusive. Existe um único inteiro h tal que $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{17}=\frac{h}{L_{17}}$. Qual é o resto quando h é dividido por 17?

a) 1
b) 3
c) 5
d) 7
e) 9

Questão 18

Defina a sequência recursivamente por $F_0 = 0, F_1 = 1$ e $F_n =$ o resto quando $F_{n-1} + F_{n-2}$ é dividido por 3, para todo $n \geq 2$. Esta sequência começa 0,1,1,2,0,2, ... Qual é o valor de

$$F_{2017} + F_{2018} + F_{2019} + F_{2020} + F_{2021} + F_{2022} + F_{2023} + F_{2024}$$

a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

Questão 19

No triângulo $\Delta ABC, AB = 6, AC = 8, BC = 10$, e D é o ponto médio de BC. Qual é a soma dos raios dos círculos inscritos nos triângulos ΔADB e ΔADC:

a) $\sqrt{5}$
b) $\frac{11}{4}$
c) $2\sqrt{2}$
d) $\frac{17}{6}$
e) 3

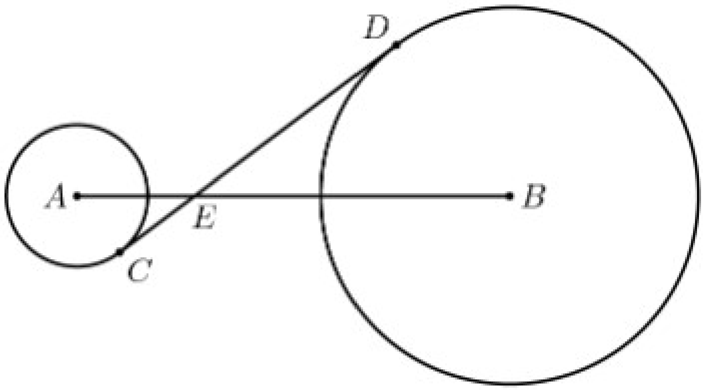
Questão 20

Seja $N = 123456789101112 \ldots 4344$ um número de 79 dígitos obtido quando escrevemos os números de 1 a 44 em ordem crescente, um após o outro. Qual é o resto de N na divisão por 45?

a) 1
b) 4
c) 9
d) 18
e) 44

Questão 21

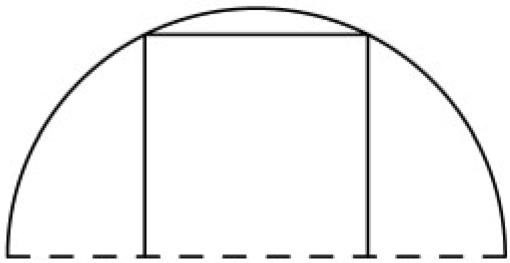
Círculos com centros em A e B tem raios 3 e 8, respectivamente. Uma tangente interna comum intersecta os círculos em C e D, respectivamente. Retas AB e CD se intersectam em E, e $AE = 5$. Qual é o valor de CD?



a) 13
b) $\frac{44}{3}$
c) $\sqrt{221}$
d) $\sqrt{255}$
e) $\frac{55}{3}$

Questão 22

Um quadrado de área 40 é inscrito em um semicírculo como mostrado na figura abaixo. Qual a área do semicírculo?



a) 20π
b) 25π
c) 30π
d) 40π
e) 50π

Questão 23

Qual dos seguintes números é um quadrado perfeito?

a) $98!.99!$
b) $98!.100!$
c) $99!.100!$
d) $99!.101!$
e) $100!.101!$

Questão 24

Na sequência $2001, 2002, 2003, \ldots$, cada termo depois do terceiro é obtido subtraindo o termo anterior da soma dos dois termos que precedem esse anterior. Por exemplo, o quarto termo é:

$$2001 + 2002 - 2003 = 2000$$

Qual é o 2004º termo dessa sequência?

a) -2004
b) -2
c) 0
d) 4003
e) 6007

Questão 25

Sejam x, y números inteiros tais que:

$$x^3 + y^3 + (x+y)^3 + 30xy = 2000$$

Então $x + y$ vale:

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

Questão 26

Quantos números inteiros entre 1 e 2005 são múltiplos de 3 ou 4 e não são de 12?

a) 501
b) 668
c) 835
d) 1002
e) 1169

Questão 27

Quantos pares de soluções inteiras positivas (x, y) existem para a equação $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{7}$:

a) 1
b) 3
c) 6
d) 9
e) 10

Questão 28

No fim de 1994, Neto tinha a metade da idade de sua avó. A soma dos anos de nascimento dos dois é 3844. Quantos anos Neto completa em 2006?

a) 55
b) 56
c) 60
d) 62
e) 108

Questão 29

Sejam x e y números racionais. Sabendo que $\frac{x-5\sqrt{2006}}{4-y\sqrt{2006}}$ também é um número racional, quanto vale o produto xy?

a) 20
b) Pode ser igual a 20, mas também pode assumir outros valores
c) 1
d) 6
e) Não se pode determinar

Questão 30

O professor Daniel aplicou uma prova para seus cinco alunos e, após corrigi-las, digitou as notas em uma planilha eletrônica que calcula automaticamente a média das notas à medida que elas são digitadas. Daniel notou que após digitar cada nota a média calculada pela planilha era um número inteiro. Se as notas dos cinco estudantes são, em ordem crescente, 71,76,80,82 e 91. Qual foi a última nota que Daniel digitou?

a) 71
b) 76
c) 80
d) 82
e) 91

RASCUNHO

Gabarito Bolsão 2023

Turma ITA

MADAN

1	C	11	D	21	B
2	E	12	E	22	E
3	D	13	E	23	C
4	D	14	B	24	C
5	D	15	D	25	E
6	C	16	E	26	D
7	B	17	C	27	B
8	A	18	D	28	C
9	C	19	D	29	A
10	A	20	C	30	C